Lösung zur Aufgabe 3, Abschnitt 14.1

Die Dirichletsche Sprungfunktion

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad x \in [0,1],$$

ist nicht Riemannintegrierbar auf $[0,1]$. Wir argumentieren unter Verwendung Riemannscher Zwischensummen. Betrachte dazu eine Zerlegung

$$\mathcal{Z}: \quad x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < 1 = x_N, \quad N \in \mathbb{N},$$

von $[0,1]$. Mit einem Zwischenwertvektor $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, ist dann die zu $\mathcal{Z}$ und ξ gehörige Zwischensumme

$$R(\chi_D, \mathcal{Z}, \xi) = \sum_{i=1}^{N} \chi_D(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- Wähle $\xi_i = p_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, N$, so ist
$$R(\chi_D, \mathcal{Z}, p) = \sum_{i=1}^{N} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1.$$

- Wähle $\xi_i = q_i \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, N$, so ist
$$R(\chi_D, \mathcal{Z}, q) = \sum_{i=1}^{N} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Wäre nun χ_D Riemannintegrierbar, so können wir zu $\varepsilon > 0$ vorgegeben eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ finden, so dass

$$|R(\chi_D, \mathcal{Z}, p) - I| < \varepsilon, \quad |R(\chi_D, \mathcal{Z}, q) - I| < \varepsilon$$

mit dem Integralwert $I \in \mathbb{R}$. Es ist aber für die Wahl $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 1 &= |R(\chi_D, \mathcal{Z}, p) - R(\chi_D, \mathcal{Z}, q)| \\ &\leq |R(\chi_D, \mathcal{Z}, p) - I| + |R(\chi_D, \mathcal{Z}, q) - I| \\ &< \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

für eine zu $\varepsilon < 1/2$ zu wählende Zerlegung $\mathcal{Z}$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

(siehe Paragraph 8.1.5, Analysis 2 im WS 2020)