14.2.5, Aufgabe 11 (Stefanie Schroeder, Paul Schöner, Julia Hasselwander)

Es sei $\{x_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Punktfolge

z.z.: $\Omega := \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ ist Jordansche Nullmenge und damit Jordan-m.b.

Bew.: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ konvergent mit Grenzwert g $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - g| < \frac{\varepsilon}{4} \ \forall n > N$ (*)

$\forall n \leq N$ bilden wir eine Überdeckung Q_n von x_n durch

$Q_n := [x_n - \frac{\varepsilon}{4N}, x + \frac{\varepsilon}{4N}]$. Dann ist $|Q_n| \overset{!}{=} \frac{\varepsilon}{2N}$ $\forall n \leq N$.

für $n > N$ nutzen wir (*), um eine Überdeckung aller x_n mit $n > N$

zu konstruieren: $Q_\varepsilon = [g - \frac{\varepsilon}{4}, g + \frac{\varepsilon}{4}]$. Q_ε überdeckt also

alle x_n für $n > N$ und es ist $|Q_\varepsilon| \overset{!}{=} \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} Q_k \cup Q_\varepsilon$

$\Rightarrow \lambda^*(\Omega) \leq \sum_{k=1}^{N} |Q_k| + |Q_\varepsilon| \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \left(\frac{\varepsilon}{2N}\right) \cdot N + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

für $\varepsilon \to 0$ ($\lambda^*(\Omega)$ betrachtet das Infimum über die elementargeom. Inhalte aller mögl. Überdeckungen, also wählt man auch hier für die Q_n und das Q_ε möglichst kleine ε) ergibt sich $\lambda^*(\Omega) \leq 0 \Rightarrow \lambda^*(\Omega) = 0$

nach Satz 14.2.2 ($\lambda_*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega)$) folgt $\lambda_*(\Omega) = \lambda^*(\Omega) = 0$ und damit $\lambda(\Omega) = 0$

$\square$