Weiterführende Analysis für das Lehramt

Gruppe 2: Abgabe 2: Theresa Jürgens, Sophie Keller, Lisa Seemann

## Aufgabe 12

Vor: Auf dem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei die Lipschitzstetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben, d.h. mit Konstante $L > 0$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \quad \forall x,y \in [a,b]$$

$N \subset [a,b]$ sei ferner Jordansche Nullmenge

ZZ: $f(N) \subset \mathbb{R}$ ist Jordansche Nullmenge

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Vor. gilt $\lambda(N) = 0$ und insb. ist $N$ J-mb.

$\Rightarrow$ Nach Satz 14.2.2. (iii) ex. äußere und innere Quaderapprox.

$\Sigma_A = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ und $\Sigma_I = \emptyset$ (wegen $\lambda(N) = 0$) s.d. $|\Sigma_A| < \varepsilon$,

wobei $I_j = [a_j, b_j]$ mit $a_j, b_j \in [a,b]$

Es gilt also $N \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$.

O.B.d.A. seien die Intervalle disjunkt (bis auf mögliche gemeinsame Randpunkte, welche allerdings Jordansche Nullmengen sind und somit vernachlässigt werden können).

[Sollen Intervalle $I_j = [a_j, b_j]$ und $I_k = [a_k, b_k]$ ex. mit $a_j < a_k < b_j < b_k$, so ersetze beide Intervalle durch $\tilde{I} = [a_j, b_k]$, um „disjunkte" Intervalle wie beschrieben zu erhalten.]

Damit gilt $|\Sigma_A| = |\bigcup_{j=1}^{k} I_j| = \sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$

Betrachte nun $I_l$ für $l \in \{1, \ldots, k\}$. Wegen $f$ stetig gilt

$$f(I_l) = \left[\min_{x \in I_l} f(x), \max_{x \in I_l} f(x)\right] := [c_l, d_l] := J_l$$

$$\Rightarrow \exists x,y \in I_l \text{ s.d. } |J_l| = |c_l - d_l| = |f(x) - f(y)| \underset{\text{nach Vor.}}{\leq} L \cdot |x-y| \leq L \cdot |I_l|$$

$$\text{Nun gilt } f(N) \subseteq f\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) \overset{f \text{ stetig}}{=} \bigcup_{j=1}^{k} f(I_j) \overset{f \text{ stetig}}{=} \bigcup_{j=1}^{k} J_j$$

$$\Rightarrow \lambda^*(f(N)) \leq \lambda^*\left(f\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right)\right) = \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{k} J_j\right) = \left|\bigcup_{j=1}^{k} J_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |J_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} L \cdot |I_j| = L \cdot \sum_{j=1}^{k} |I_j| = L \cdot \left|\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right| \leq L \cdot \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Mit $\varepsilon \to 0$ folgt $\lambda^*(f(N)) = 0$ und damit die Behauptung.

q.e.d.