Vermessung einer unerreichbaren Meeresinsel

Jetzt wollen wir eine Meeresinsel vermessen. Wir errichten zwei Pfähle gleicher Höhe, nämlich 6,9 Meter gemessen vom Boden. Der Abstand zwischen dem vorderen und dem hinteren Pfahl beträgt 1380 Meter. Wir nehmen an, dass die Insel, der vordere Pfahl und der hintere Pfahl in einer Linie ausgerichtet sind. Entferne dich nun 169,74 Meter vom vorderen Pfahl und beobachte den Gipfel der Insel von der Bodenoberfläche aus; es zeigt sich, dass dann die Spitze des vorderen Pfahls mit dem Gipfel übereinstimmt. Entferne dich nun 175,26 Meter vom hinteren Pfahl und beobachte wieder den Gipfel der Insel von der Bodenoberfläche aus; die Spitze des hinteren Pfahls stimmt dann ebenfalls mit dem Gipfel berein. Frage: Wie hoch ist die Insel, und wie weit ist sie vom vorderen Pfahl entfernt?

Vorbereitung

Aufgabenstellung

In der nachstehenden Abbildung bedeuten

- AS der vordere und NC der hintere Pfahl;
- B der vordere und D der hintere Beobachtungspunkt.

Wir wollen das Problem einmal unter Verwendung Euklids Proposition I.43, ein zweites Mal unter Anwendung Euklids Theorie ähnlicher Dreieck aus dem sechsten Buch der *Elemente* lösen.

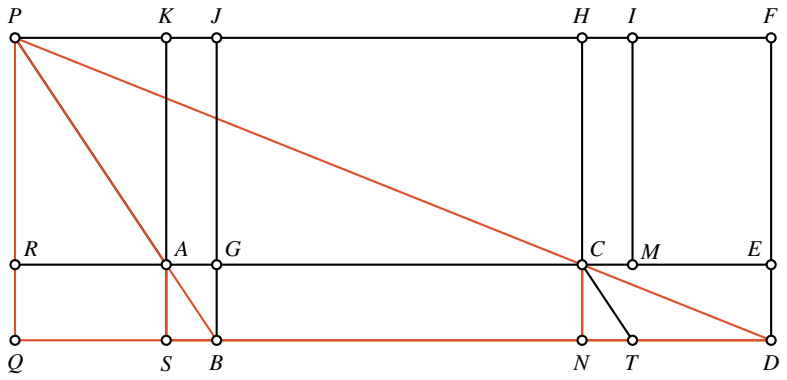

Abb.: Zur Vermessung einer unerreichbaren Meeresinsel

Es sei insbesondere AB parallel zu CT, und es gelte $AG = CM$.

Gegebene Größen

Bekannte Größen sind die folgenden Strecken [in Meter]:

- AS mit $|AS| = 6,9$
- CN mit $|CN| = 6,9$
- BS mit $|BS| = 169,74$
- NS mit $|NS| = 1380$
- DN mit $|DN| = 175,26$

Gesuchte Größen

Gesucht sind

- die Gipfelhöhe $|PQ|$ der Insel
- und deren Entfernung $|QS|$ zum vorderen Pfahl.

Lösung unter Verwendung Euklids Proposition I.43

Berechnung der Gipfelhöhe

Nach Proposition I.43 der *Elemente* gelten zunächst

$$|QSAR| = |AGJK| = |CMIH|, \quad |QNCR| = |CEFH|,$$

so dass wir erhalten

$$|SNCA| = |QNCR| - |QSAR| = |CEFH| - |CMIH| = |MEFI|.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} |AS| \cdot |NS| &= |IM| \cdot |EM| = |PR| \cdot |EM| = |PR| \cdot (|CE| - |CM|) \\ &= |PR| \cdot (|DN| - |BS|). \end{aligned}$$

Es folgen also nach Umstellen

$$|PR| = \frac{|AS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|} \tag{α}$$

bzw. wegen $|PQ| = |PR| + |QR|$ und $|QR| = |AS|$

$$|PQ| = \frac{|AS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|} + |AS|. \tag{β}$$

Einsetzen der bekannten Größen ergibt die gesuchte Gipfelhöhe zu

$$|PQ| = 1731,9 \text{ Meter}.$$

Berechnung der Entfernung zur Insel

Wir gehen aus von der bereits bekannten Identität

$$|QSAR| = |AGJK|.$$

Wegen $AK = PR$ und $AG = BS$ folgt hieraus

$$|QS| \cdot |AS| = |AK| \cdot |AG| = |PR| \cdot |BS|.$$

Ziehen wir jetzt (α) hinzu, so erhalten wir

$$|QS| \cdot |AS| = |BS| \cdot \frac{|AS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|}$$

bzw. nach Umstellen

$$|QS| = \frac{|BS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|}\,. \tag{γ}$$

Einsetzen der bekannten Größen ergibt die gesuchte Entfernung der Insel zum vorderen Pfahl zu

$$|QS| = 42.435 \text{ Meter.}$$

Lösung unter Verwendung ähnlicher Dreiecke

Berechnung der Gipfelhöhe

Die Dreiecke PRA und CNT sowie PAC und CTD sind, da jeweils entsprechende Winkel übereinstimmen, ähnlich zueinander. Daraus schließen wir

$$\frac{|PR|}{|CN|} = \frac{|AR|}{|NT|} = \frac{|AP|}{|CT|} \quad \text{sowie} \quad \frac{|AP|}{|CT|} = \frac{|AC|}{|DT|} = \frac{|CP|}{|CD|}\,.$$

Alle diese sechs Verhältnisse sind also gleich, so dass insbesondere gilt

$$\frac{|PR|}{|CN|} = \frac{|AC|}{|DT|}\,.$$

Nun sind aber auch

$$\frac{|PR|}{|CN|} = \frac{|PQ| - |QR|}{|AS|}\,, \quad \frac{|AC|}{|DT|} = \frac{|NS|}{|DN| - |BS|}\,,$$

so dass Umstellen die bereits aus (β) bekannte Darstellung liefert

$$|PQ| = \frac{|AS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|} + |AS|.$$

Berechnung der Entfernung zur Insel

Aus der Gleichheit der vorigen sechs Verhältnisse lesen wir aber auch ab

$$\frac{|AR|}{|NT|} = \frac{|AC|}{|DT|}\,.$$

Wir müssen hierin nur noch das links stehende Verhältnis umschreiben in

$$\frac{|AR|}{|NT|} = \frac{|QS|}{|BS|}$$

und erhalten nach Einbeziehen der vorigen Darstellung für das rechts stehende Verhältnis nach Umstellen

$$|QS| = \frac{|BS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|}\,.$$

Das verifiziert unsere obige Darstellung (γ) der Entfernung zur Insel.

Beide Lösungswege sind entnommen:
Swetz, F.J.: *The sea island mathematical manual.* The Pennsylvania State University Press, 1992