Vermessung eines unerreichbaren Kiefernbaumes

Jetzt wollen wir die Höhe eines Kiefernbaumes vermessen, der auf einem Hügel von ebenfalls unbekannter Höhe wächst. Wir errichten zwei Pfähle der gemeinsamen Höhe 4,6 Meter auf dem Boden vom gegenseitigen Abstand 69 Meter. Wir nehmen an, dass der Baum, der vordere Pfahl und der hintere Pfahl in einer Linie ausgerichtet sind. Entferne dich nun 10,58 Meter vom vorderen Pfahl und beobachte den Gipfel des Kiefernbaumes von der Bodenoberfläche aus; es zeigt sich, dass dann die Spitze des vorderen Pfahles mit dem Gipfel des Baumes übereinstimmt. Betrachte aus dieser Position auch den Fuß des Baumes, der bez. des Pfahles 0,64 Meter unterhalb dessen Spitze zu liegen kommt. Entferne dich nun 12,19 Meter vom hinteren Pfahl und beobachte den Gipfel des Baumes von der Bodenoberfläche aus; es zeigt sich, dass dann die Spitze des Pfahles mit dem Gipfel des Baumes übereinstimmt. Frage: Wie hoch ist der Baum, und wie weit ist er vom vorderen Pfahl entfernt?

Vorbereitung

Aufgabenstellung

In der nachstehenden Abbildung bedeuten

- CD der vordere und EF der hintere Pfahl;
- G der vordere und H der hintere Beobachtungspunkt;
- BK die Höhe des Hügels.

Gegebene Größen

Bekannte Größen sind die folgenden Strecken [in Meter]:

- CD mit $|CD| = 4,6$
- EF mit $|EF| = 4,6$
- DF mit $|DF| = 69$
- DG mit $|DG| = 10,58$
- FH mit $|FH| = 12,19$
- CL mit $|CL| = 0,64$

Gesuchte Größen

Gesucht sind

- die Höhe des Kiefernbaumes $|AB|$
- und dessen Entfernung $|DK|$ zum vorderen Pfahl.

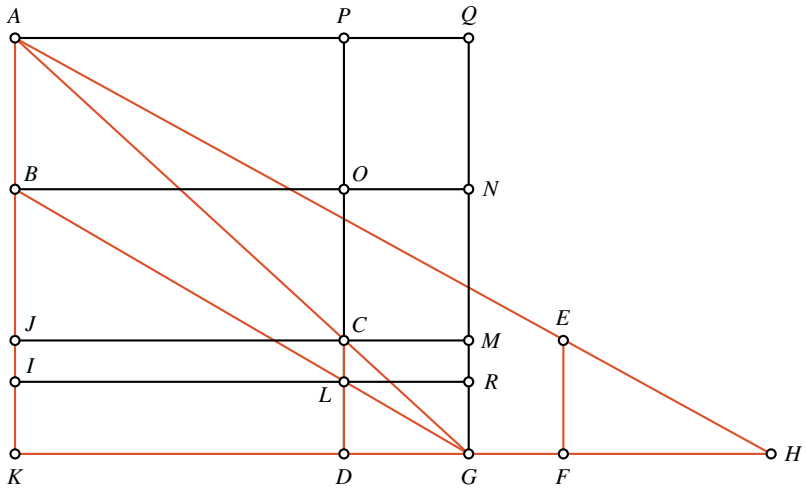

Abb.: Zur Vermessung eines unerreichbaren Kiefernbaumes

Lösung unter Verwendung Euklids Proposition I.43

Berechnung der Entfernung des Baumes

Zunächst wenden wir die im Problem *Zur Vermessung einer unerreichbaren Meeresinsel* gewonnene Identität zur Entfernungsbestimmung an. Demnach gilt

$$|DK| = \frac{|DG| \cdot |DF|}{|FH| - |DG|}\,. \qquad (\alpha)$$

Das ist bereits die gesuchte Entfernung des Baumes zum vorderen Pfahl, genauer

$$|DK| = 453{,}43 \text{ Meter.}$$

Berechnung der Höhe des Baumes

Proposition I.43 der *Elemente* liefert

$$|KDCJ| = |CMQP|, \quad |LRNO| = |KDLI|.$$

Auf Grund von

$$|ILCJ| = |KDCJ| - |KDLI|$$

schließen wir

$$|ILCJ| = |CMQP| - |LRNO|$$

bzw. gleichbedeutend

$$|CL| \cdot |KD| = |CM| \cdot |MQ| - |CM| \cdot |LO| = |CM| \cdot (|MQ| - |LO|).$$

Wegen

$$|MQ| = |NQ| + |MN| \quad \text{und} \quad |LO| = |MN| + |CL|$$

ist dann aber auch

$$\begin{aligned} |CL| \cdot |KD| &= |CM| \cdot (|NQ| + |MN| - |MN| - |CL|) \\ &= |CM| \cdot (|NQ| - |CL|), \end{aligned}$$

und zusammen mit

$$|NQ| = |AB| \quad \text{und} \quad |CM| = |DG|$$

erhalten wir

$$|CL| \cdot |KD| = |DG| \cdot (|AB| - |CL|)$$

bzw. nach Umstellen

$$|AB| = \frac{|CL| \cdot |DK|}{|DG|} + |CL|.$$

Hierin ist noch $|DK|$ durch die obige Darstellung (α) zu ersetzen, so dass wir schließlich mit

$$|AB| = \frac{|CL| \cdot |DG| \cdot |DF|}{|DG| \cdot (|FH| - |DG|)} + |CL| = \frac{|CL| \cdot |DF|}{|FH| - |DG|} + |CL|$$

auf die gesuchte Höhe des Kiefernbaumes gelangen. Einsetzen der bekannten Größen ergibt genauer

$$|AB| = 28{,}07 \text{ Meter.}$$

Der Lösungsweg ist entnommen:

Swetz, F.J.: *The sea island mathematical manual.* The Pennsylvania State University Press, 1992