Theoreme zu den Definition 1 und 2

Bedeutung der Theoreme

Theorem 1 und Theorem 3 charakterisieren die Mengen $a'b$ bzw. ab' aus den ersten beiden Definitionen der Peanoschen Axiomatik.

Theorem 2 ist eine äquivalente Darstellung des ersten Theorems, was insbesondere durch die von uns verwendete Mengenschreibweise augenfällig wird. Das Theorem 4 fasst schließlich die Aussagen des zweiten und des dritten Theorems zusammen.

Darstellung der Theoreme

Theorem 1. *Es seien $a, b \in \mathscr{P}$. Dann gilt*

$$(c \in a'b) \longleftrightarrow (c \in \mathscr{P} \text{ und } b \in ac).$$

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Richtungen:

(i) Es sei $c \in a'b$, nach Definition 1 also $c \in \{x \in \mathscr{P} : b \in ax\}$. Dann gilt $c \in \mathscr{P}$, aber auch sogleich $b \in ac$.

(ii) Es sei $c \in \mathscr{P}$ mit $b \in ac$. Dann gilt $c \in \{x \in \mathscr{P} : b \in ac\}$ bzw. $c \in a'b$ nach Definition 1.

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Theorem 2. *Es seien $a, b, c \in \mathscr{P}$. Dann gilt*

$$(c \in a'b) \longleftrightarrow (b \in ac).$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Theorem 1. □

Theorem 3. *Es seien $a, b, c \in \mathscr{P}$. Dann gilt*

$$(c \in ab') \longleftrightarrow (a \in cb).$$

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Richtungen:

(i) Es sei $c \in ab'$, nach Definition 2 also $c \in \{x \in \mathscr{P} : a \in xb\}$. Dann gilt insbesondere auch $a \in cb$.

(ii) Es sei $a \in cb$. Dann gilt $c \in \{x \in \mathscr{P} : a \in xb\}$ bzw. $c \in ab'$ nach Definition 2.

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Theorem 4. *Es seien $a, b, c \in \mathscr{P}$. Dann gelten*

$$(a \in bc) \longleftrightarrow (b \in ac') \quad \textit{und} \quad (b \in ac') \longleftrightarrow (c \in b'a).$$

Beweis. Es sind zwei Aussagen zu beweisen:

(i) Die erste Behauptung ist eine Umformulierung der Aussage von Theorem 3.

(ii) Nach Theorem 2 ist $(c \in b'a)$ äquivalent zu $(a \in bc)$ und daher nach Beweispunkt (i) auch äquivalent zu $(b \in ac')$.

Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$