Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Fachbereich 08, Institut für Mathematik
S. Fröhlich, S. Parr

03. März 2020

Klausur zur Vorlesung
Weiterführende Analysis für das Lehramt

Name, Vorname	
Studiengang	

Matr.-Nr.		Semester		3. Versuch	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	6	6	8	6	8	6
err. Punkte							

Aufgabe	8	9	10	11	Σ	Note
max. Punkte	8	8	8	8^*	72	
err. Punkte						

Mein Fantasiename:

Mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses im Reader unter meinem Fantasienamen bin ich

□ einverstanden □ nicht einverstanden

Unterschrift

Bearbeitungszeit: 120 min

Wichtige Hinweise – Nichtbeachtung kann zu Punktabzug führen:

- Versehen Sie dieses Blatt sowie jedes weitere Blatt Ihrer Ausarbeitung gut lesbar mit Ihrem *Namen* und Ihrer *Matrikelnummer*.
- Verschiedene Aufgaben dürfen *nicht auf demselben Blatt* bearbeitet werden.
- Die Farbe *rot* darf nicht verwendet werden.
- Schreiben Sie durchgängig klar strukturiert und *gut lesbar*.
- Alle *Zwischenschritte* sind zu begründen. Die Angabe eines Ergebnisses allein genügt i.A. *nicht*.

Aufgabe 1: *Die Cantorsche Mittel-Drittel-Menge* **2+2+3+1=8 Punkte**

Die Cantorsche Mittel-Drittel-Menge $C \subset \mathbb{R}$ lässt sich wie folgt konstruieren:

- der Menge $C_0 := [0,1]$ wird $D_0 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ entnommen, es entsteht C_1
- der Menge C_1 wird $D_1 := \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ entnommen, es entsteht C_2
- der Menge C_2 wird $D_2 := \ldots$ entnommen usw.

Aufgaben:

(i) Wie lauten die Mengen C_1, C_2 und D_2?

(ii) Definieren Sie C vermittels der Mengen $C_0, C_1, C_2, \ldots$ geeignet. Skizzieren Sie.

(iii) Begründen Sie unter Verwendung eines Satzes der Analysis 2, dass C kompakt ist.

(iv) Welche „Länge“ besitzt C (ohne Begründung)?

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) (iv) Gesamt:

Aufgabe 2: *Äußeres Lebesguemaß und Caratheodorykriterium* **2+2+2=6 Punkte**

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

(i) Wie wurde in der Vorlesung das äußere Lebesguesche Maß von Ω definiert?

(ii) Wie lautet das Caratheodorysche Messbarkeitskriterium zur Lebesguemessbarkeit von Ω?

(iii) Beweisen Sie die Lebesguemessbarkeit von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für den Fall $\ell_n^*(\Omega) = 0$.

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 3: *Lebesguemessbare Funktionen* **2+2+2=6 Punkte**

Auf der Lebesguemessbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir eine Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Wann heißt f nach Definition aus der Vorlesung Lebesguemessbar?

(ii) Beweisen Sie: Ist die Funktion f stetig, so ist sie auch Lebesguemessbar.
Hinweis: Beziehen Sie sich auf ein bekanntes Stetigkeitskriterium aus der Analysis 2. Ohne Beweis dürfen Sie die Lebesguemessbarkeit offener Mengen benutzen.

(iii) Ist die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in [-1,1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \\ 2-x, & \text{falls } x \in (1,2] \end{cases}$$

Lebesguemessbar auf $[-1,2]$? Begründen Sie mit wenigen Worten. Skizzieren Sie $f(x)$.

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 4: *Satz über majorisierte Konvergenz* **4+4=8 Punkte**

(i) Wie lautet der Satz über majorisierte Konvergenz?

(ii) Beweisen Sie die Aussage

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{kx}{1+k^2x^2}\, d\ell_1(x) = 0$$

unter Verwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 5: *Satz von Fubini* **6 Punkte**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Omega} 1 \, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2,\, x \leq y \leq x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: Der Satz von Fubini und eine Begründung dessen Anwendbarkeit müssen nicht explizit aufgeführt werden.

Erreichte Punkte:

Aufgabe 6: *Anwendung der Transformationsformel* **4+4=8 Punkte**

Gesucht ist der Wert des Integrals

$$I := \int_B (x^2+y^2)\, d\ell_2(x,y)$$

über die Einheitskreisscheibe $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Beschreiben Sie B vermittels einer geeigneten Abbildung $\Phi(r,\varphi)$ und Polarkoordinaten (r,φ). Wie lauten deren Definitionsbereiche? Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\det \partial\Phi(r,\varphi)|$.

(ii) Ermitteln Sie nun I unter Verwendung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale. Warum ist die Transformationsformel anwendbar, obwohl nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 7: *Divergenz und Rotation* **3+3=6 Punkte**

Betrachten Sie das Vektorfeld $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ vermöge

$$f(x,y,z) := (x-y, xy-yz-zx, xyz), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{div} f(1,1,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie speziell $\operatorname{rot} f(2,1,3)$.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 8: *Gradientenfelder und Potentiale* **4+4=8 Punkte**

Auf der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ betrachten wir ein Vektorfeld $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

(i) Wann heißt eine Abbildung $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ein *Potential* von $f(x)$? Wann heißt $f(x)$ ein *Gradientenfeld?*

(ii) Beweisen Sie: Besitzt das Feld $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ein Potential $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, so gilt

$$\operatorname{rot} f(x) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 9: *Gradientenfelder und Kurvenintegrale* **4+2+2=8 Punkte**

Betrachten Sie das Vektorfeld $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vermöge

$$f(x,y) = (4x^3 + 2y + 1, 3y^2 + 2x + 1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(i) Überprüfen Sie die Integrierbarkeitsbedingung. Begründen Sie, dass es sich bei $f(x,y)$ um ein Gradientenfeld handelt, und geben Sie ein Potential $\varphi(x,y)$ an.

Weiter betrachten wir die die Punkte $x_0 = (1,1)$ und $x_1 = (2,2)$ verbindende und reguläre Kurve

$$C : \gamma(t) = (t,t), \quad t \in [1,2].$$

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x,y)$ entlang $C \subset \mathbb{R}^2$ gemäß Definition.

(iii) Was können Sie – ohne Rechnung, ohne Begründung – über die Potentialdifferenz $\varphi(\gamma(2)) - \varphi(\gamma(1))$ aussagen? Folgern Sie, dass das Kurvenintegral aus (i) wegunabhängig ist.

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 10: *Der Gaußsche Divergenzsatz* **2+2+4=8 Punkte**

Die Einheitskreisscheibe $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ genügt den Voraussetzungen des Gaußschen Satzes in der Ebene (erster Integralsatz in der Vorlesung).

(i) Notieren Sie ohne Begründung die in diesem Satz behauptete Integralidentität für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f = (f_1, f_2) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Es sei nun speziell

$$f(x,y) = (x^3, y^3), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(ii) Welchen Wert besitzt das Gebietsintegral in der Integralidentität aus (i)? Verwenden Sie hierzu eine der vorigen Aufgaben.

(iii) Ermitteln Sie nun das Kurvenintegral in der Integralidentität aus (i) vermittels der regulären Randparametrisierung $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Vergleichen Sie mit (ii).

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie benutzen

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}, \quad \cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 11: *Zum Hinweis in Aufgabe 10* **4+4=8* Punkte**

Herzuleiten sind die in Aufgabe 10 verwendeten Identitäten

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}, \quad \cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}. \tag{$*$}$$

(i) Unter Verwendung der nicht zu beweisenden Identitäten $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sind zunächst abzuleiten

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

(ii) Die Gleichungen $(*)$ sind nun durch Quadrieren der Identitäten aus (i) zu beweisen.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt: