Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Fachbereich 08, Institut für Mathematik
S. Fröhlich, S. Parr

09. März 2015

Klausur zur Vorlesung
Analysis 3

Name, Vorname	
Studiengang	

Matr.-Nr.		Semester		3. Versuch	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
max. Punkte	7	8	7	5	8	8	5	7
err. Punkte								

Aufgabe	9	10	11	12	Σ	Note
max. Punkte	5	5	4	6	75	
err. Punkte						

Vor dem Einreichen hier falten!

Bearbeitungszeit: 120 min

Wichtige Hinweise – Nichtbeachtung kann zu Punktabzug führen:

- Versehen Sie dieses Blatt sowie jedes weitere Blatt Ihrer Ausarbeitung gut lesbar mit Ihrem *Namen* und Ihrer *Matrikelnummer*.
- Verschiedene Aufgaben dürfen *nicht auf demselben Blatt* bearbeitet werden.
- Die Farbe *rot* darf nicht verwendet werden.
- Schreiben Sie durchgängig klar strukturiert und *gut lesbar*.
- Alle *Zwischenschritte* sind zu begründen. Die Angabe eines Ergebnisses allein genügt i.A. *nicht*.
- Falten Sie nach Ende der Klausur dieses Blatt in der Mitte, und legen Sie *alle Blätter* mit Ihrer Ausarbeitung hinein.

Aufgabe 1: *Äußeres Lebesguesches Maß*

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

(i) Wie wurde in der Vorlesung das *äußere Lebesguesche Maß* einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert?

(ii) Was versteht man unter *Subadditivität* des äußeren Lebesguemaßes?

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 2: *Lebesguemessbare Mengen*

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

(i) Wie lautet das *Caratheodorysche Messbarkeitskriterium* zur Lebesguemessbarkeit?

(ii) Beweisen Sie die Lebesguemessbarkeit von Ω im Falle $\ell_n^*(\Omega) = 0$.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 3: *Lebesguemessbare Funktionen*

Auf der Lebesguemessbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir eine Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(i) Wann heißt die Funktion $f(x)$ Lebesguemessbar?

(ii) Beweisen Sie: Ist die Funktion $f(x)$ stetig, so ist sie auch Lebesguemessbar.
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie die Lebesguemessbarkeit offener Mengen benutzen.

(iii) Beweisen Sie: Ist die Funktion $f(x)$ Lebesguemessbar, so auch $|f(x)|$.

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 4: *Lebesgueintegrierbare Funktionen*

Auf der Lebesguemessbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Lebesgueintegrierbare Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

(i) Beweisen Sie: Ist $f(x)$ nichtnegativ, so gilt die *Tschebyschev-Ungleichung*

$$\ell_n^*(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\Omega} f(x)\, d\ell_n(x), \quad \lambda > 0.$$

(ii) Folgern Sie: Für alle $\lambda > 0$ besitzt die Menge

$$\Omega_\lambda := \{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}$$

endliches äußeres Lebesguemaß.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 5: *Das Hausdorffsche äußereMaß*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge.

(i) Wie wurde in der Vorlesung das δ-approximative s-dimensionale Hausdorffmaß $\mathscr{H}^s_\delta(\Omega)$ definiert?

(ii) Wie wurde in der Vorlesung das s-dimensionale Hausdorffmaß $\mathscr{H}^s(\Omega)$ definiert?

(iii) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie mit der charakteristischen Eigenschaft

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \,.$$

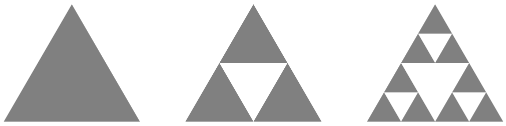
Wie verhält sich dann das Hausdorffmaß $\mathscr{H}^s(T(\Omega))$ im Vergleich zu $\mathscr{H}^s(\Omega)$?

Hinweis: Ohne Beweis; ein Zusatzpunkt bei richtiger Beweisidee.

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 6: *Ähnlichkeitsdimension und Sierpinskidreieck*

(i) Erläutern Sie in wenigen Worten den Aufbau des Sierpinskidreiecks.



usw.

(ii) Wie lautet die Ähnlichkeitsdimension des Sierpinskidreiecks?

Hinweise: Was sind Skalierungsfaktor und Zahl der Unterteilungen? Die Definition der Ähnlichkeitsdimension muss ersichtlich sein!

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 7: *Der Satz über beschränkte Konvergenz*

(i) Wie lautet der Satz über beschränkte Konvergenz?

Gegeben sei jetzt die Funktionenfolge

$$f^{(k)}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit einer Abzählung $q_1, q_2, \ldots$ der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$.

(ii) Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x),$$

(iii) Ermitteln Sie, falls existent, den Wert $\int_{[0,1]} f(x)\, d\ell_1(x)$.

Erreichte Punkte:	(i)	(ii)	(iii)	Gesamt:

Aufgabe 8: *Zum Satz von Fubini*

Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_\Omega 1 \, d\ell_2(x,y) \quad \text{mit} \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq x^3\}$$

unter Verwendung des Fubinischen Satzes.

Hinweis: Der Satz von Fubini muss nicht explizit aufgeführt werden.

Erreichte Punkte:

Aufgabe 9: *Divergenz und Rotation*

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f(x,y,z) := (x+y, xyz, xy+yz+zx), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y,z)$ sowie $\operatorname{div} f(1,2,3)$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ sowie $\operatorname{rot} f(1,2,3)$.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 10: *Gaußscher Divergenzsatz*

Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ genüge den Voraussetzungen des Gaußschen Divergenzsatzes im $\mathbb{R}^2$.

(i) Wie lautet die Gaußsche Integralidentität?

(ii) Beweisen Sie die erste Greensche Identität

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\ell_2(u,v) = \int\limits_{\partial\Omega} u\, \frac{\partial v}{\partial N}\, ds.$$

(iii) Beweisen Sie die zweite Greensche Identität

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\ell_2(u,v) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\, \frac{\partial v}{\partial N} - v\, \frac{\partial u}{\partial N} \right) ds.$$

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 11: *Integration von 2-Formen*

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{und} \quad z > 0$$

gegebene Fläche im $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie eine geeignete Parameterdarstellung für M.

(ii) Berechnen Sie damit

$$\int_M \omega \quad \text{mit} \quad \omega := x\,dy \wedge dz + y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy.$$

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 12: *Geschlossene und exakte Differentialformen*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Wann heißt eine k-Form der Klasse $C^1(\Omega)$ *geschlossen,* wann *exakt?*

(ii) Formulieren Sie das *Poincarésche Lemma.*

(iii) Zeigen Sie, dass die Differentialform

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \quad \text{auf} \quad \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,:\, x \leq 0\}$$

exakt ist. Begründen Sie unter Verwendung von (ii).

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt: