Johannes Gutenberg-Universität Mainz 05. September 2017
Fachbereich 08, Institut für Mathematik
S. Fröhlich, S. Parr

Klausur zur Vorlesung
Analysis 3

Name, Vorname	
Studiengang	

Matr.-Nr.		Semester		3. Versuch	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
max. Punkte	6	4	4	7	6	4	9	3
err. Punkte								

Aufgabe	9	10	11	12	Σ	Note
max. Punkte	5	7	7	8	70	
err. Punkte						

Bearbeitungszeit: 120 min

Wichtige Hinweise – Nichtbeachtung kann zu Punktabzug führen:

- Versehen Sie dieses Blatt sowie jedes weitere Blatt Ihrer Ausarbeitung gut lesbar mit Ihrem *Namen* und Ihrer *Matrikelnummer*.
- Verschiedene Aufgaben dürfen *nicht auf demselben Blatt* bearbeitet werden.
- Die Farbe *rot* darf nicht verwendet werden.
- Schreiben Sie durchgängig klar strukturiert und *gut lesbar*.
- Alle *Zwischenschritte* sind zu begründen, und es ist auf aus der Vorlesung bzw. Übung bekannte und verwendete Sätze hinzuweisen. Die Angabe eines Ergebnisses allein genügt i.A. *nicht*.

Ich versichere, dass ich die Zulassung zur Teilnahme an der Klausur erworben und mich zur Klausur angemeldet habe. Ich nehme zur Kenntnis, dass andernfalls meine Lösungen weder korrigiert noch benotet werden.

Unterschrift:

Aufgabe 1: *Äußeres Lebesguesches Maß* **2+2+2 Punkte**

(i) Wie wurde in der Vorlesung das *äußere Lebesguesche Maß* einer Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert?

(ii) Was versteht man unter *Monotonie* und *Subadditivität* des äußeren Lebesguemaßes?

(iii) Beweisen Sie: Ist die symmetrische Differenz $\Omega\Delta\Theta := (\Omega\backslash\Theta)\cup(\Theta\backslash\Omega)$ zweier Mengen $\Omega,\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesguesche Nullmenge, so gilt $\ell_n^*(\Omega) = \ell_n^*(\Theta)$.

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 2: *Lebesguemessbare Mengen* **1+3 Punkte**

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

(i) Wie lautet das *Caratheodorysche Messbarkeitskriterium* zur Lebesguemessbarkeit von Ω?

(ii) Beweisen Sie damit die Lebesguemessbarkeit von $\Omega \cup \Theta$, falls Ω Lebesguemessbar ist und $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesguesche Nullmenge bezeichnet.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 3: *Lebesguemessbare Funktionen* **2+2 Punkte**

Auf der Lebesguemessbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir eine Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Beweisen Sie: Ist die Funktion f Lebesguemessbar, so auch f^2.

(ii) Beweisen Sie: Ist nun $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesguemessbarer Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, so ist f genau dann Lebesguemessbar, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ die eingeschränkte Funktion $f|_{\Omega_k}$ Lebesguemessbar ist.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 4: *Lebesgueintegrierbare Funktionen* **5+2 Punkte**

Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesguemessbar mit $\ell_n^*(\Omega) > 0$ sowie $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Lebesgueintegrierbare Funktion.

(i) Beweisen Sie: Ist $f > 0$ fast überall in Ω, so ist

$$0 < \int_\Omega f(x) d\ell_n(x) < \infty.$$

(ii) Schließen Sie nun:

$$f = 0 \quad \text{fast überall in } \Omega \quad \text{genau dann, wenn} \quad \int_\Omega |f(x)| d\ell_n(x) = 0.$$

Hinweis: Das Zitieren eines entsprechenden Satzes aus der Vorlesung genügt hier nicht.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 5: *Cantorstaub und Hausdorffsches äußeres Maß* **2+4 Punkte**

(i) Erläutern Sie die Konstruktionsvorschrift des Cantorstaubs C. Fertigen Sie dazu auch eine Skizze an, aus der die Konstruktion ersichtlich wird.

(ii) Zeigen Sie nun die Abschätzung
$$\mathscr{H}^1(C) \leq \sqrt{2}$$
für das eindimensionale Hausdorffmaß des Cantorstaubs C.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 6: *Zur Hausdorffdimension* **3+1 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge.

(i) Zeigen Sie: Ist $\mathscr{H}^s(\Omega) < \infty$, so gilt $\mathscr{H}^t(\Omega) = 0$ für alle $t > s$.

(ii) Was versteht man unter der Hausdorffdimension der Menge Ω?

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 7: *Konvergenzsätze* **3+6 Punkte**

(i) Nennen Sie zwei aus der Vorlesung bekannte Konvergenzsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie. Formulieren Sie anschließend einen der genannten Sätze.

(ii) Beweisen Sie den Satz von Scheffé: Auf der Lebesguemessbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien $f^{(k)}, f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ nichtnegative, Lebesgueintegrierbare Funktionen für alle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = f(x) \quad \text{fast überall in } \Omega \quad \text{sowie} \quad \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f^{(k)}(x)d\ell_n(x) = \int_\Omega f(x)d\ell_n(x).$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f^{(k)}(x) - f(x)| d\ell_n(x) = 0.$$

Hinweise: Betrachten Sie die Funktionen $g^{(k)} := f^{(k)} + f - |f^{(k)} - f|$.
Der verwendete Konvergenzsatz muss hier nicht explizit formuliert werden. Seine Anwendbarkeit und Benutzung müssen aber deutlich ersichtlich sein.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 8: *Iterierte Integration* **3 Punkte**

Es sei

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq \sin x,\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}(1-z),\, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Berechnen Sie $\ell_3^*(M)$.

Erreichte Punkte:

Aufgabe 9: *Gradientenfelder* **2+1+2 Punkte**

(i) Beweisen Sie: Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein auf der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbares Gradientenfeld, so gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

(ii) Wann ist die für ein Gradientenfeld notwendige Gültigkeit der Integrabilitätsbedingungen auch hinreichend?

Hinweis: Ohne Beweis.

(iii) Begründen Sie, ob durch

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{vermöge} \quad f(x,y,z) = (2x, -2yz, -y^2)$$

ein Gradientenfeld gegeben ist, und bestimmen Sie ggf. ein Potential.

Erreichte Punkte: (i) (ii) (iii) Gesamt:

Aufgabe 10: *Gaußscher Divergenzsatz* **2+5 Punkte**

Die kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ genüge den Voraussetzungen des Gaußschen Divergenzsatzes im $\mathbb{R}^2$.

(i) Wie lautet der Gaußsche Divergenzsatz?
Hinweis: Die verwendeten Funktionen usw. sind kurz zu erläutern.

(ii) Berechnen Sie $\ell_2^*(B_r)$ mit Hilfe des Gaußschen Divergenzsatzes, wobei B_r die Kreisscheibe

$$B_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

vom Radius $r > 0$ bezeichne.

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 11: *Integration von 2-Formen* **2+5 Punkte**

Es seien $a,b,c > 0$ und $M \subset \mathbb{R}^3$ die durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad z > 0$$

gegebene Fläche im $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie eine geeignete Parameterdarstellung für M.

(ii) Berechnen Sie damit

$$\int\limits_M \omega \quad \text{mit} \quad \omega := x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - z\,dy \wedge dx.$$

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt:

Aufgabe 12: *Differentialformen* **3+5 Punkte**

(i) Es seien eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zwei C^1-reguläre 0-Formen f und g mit $g = \varphi \circ f$ gegeben. Zeigen Sie: $df \wedge dg = 0$.

(ii) Beweisen Sie: Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\operatorname{div} f = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

so existiert eine Abbildung $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\operatorname{rot} a = f \quad \text{in } \Omega.$$

Erreichte Punkte: (i) (ii) Gesamt: