Übungsaufgabe zu 19.5.5 Aufgabe 4

Jessica Schilling
Florian Weinheimer
Lea Reinheimer

zz: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \Omega^c, \mathbb{R}^n\}$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^n$.

Bew: (i) zz: Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$

Bew: $\emptyset \in \{\emptyset, \Omega, \Omega^c, \mathbb{R}^n\} = \mathcal{A}$ ✓

(ii) zz: Ist $\Omega \in \mathcal{A}$, so gilt auch $\Omega^c \in \mathcal{A}$

Bew: $\emptyset \in \mathcal{A}$, $(\emptyset)^c = \mathbb{R}^n \overset{\text{def}}{\in} \mathcal{A}$ ✓

$\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$, $(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset \overset{\text{def}}{\in} \mathcal{A}$ ✓

$\Omega \in \mathcal{A}$, $(\Omega)^c = \Omega^c \overset{\text{def}}{\in} \mathcal{A}$ ✓

$\Omega^c \in \mathcal{A}$, $(\Omega^c)^c = \Omega \overset{\text{def}}{\in} \mathcal{A}$ ✓

(iii) zz: Sind abzählbar endlich oder unendlich viele $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so gilt auch

$$\bigcup_{i \geq 1} \Omega_i \in \mathcal{A}$$

Bew: $\emptyset \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{A}$

$\emptyset \cup \Omega^c = \Omega^c \in \mathcal{A}$

$\emptyset \cup \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

$\Omega \cup \Omega^c \underset{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n}{=} \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

$\Omega \cup \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

$\Omega^c \cup \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\emptyset \cup \Omega}_{\Omega} \cup \Omega^c}_{\mathbb{R}^n} \cup \mathbb{R}^n}_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$$

□