14,5 Aufgabe 6 (Gabriel Amadeus Müller, Navin Josef Suman Dass, Felix Peter Paul)

z.z. $\mathcal{A} := \{ A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar} \}$ bildet σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^n$

Beweis:

(i) z.z. $\emptyset \in \mathcal{A}$

Beweis: $\emptyset$ abzählbar nach Def $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

(anschauliche Begründung, warum $\emptyset$ abzählbar ist: $\emptyset \in \{1\}$, da die Menge $\{1\}$ abzählbar ist, muss die leere Menge als Teilmenge auch abzählbar sein)

(ii) z.z. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig

Kurzversion: Aussage folgt aus Konstruktion von $\mathcal{A}$, denn $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ weil Bedingung der Abzählbarkeit nur von A oder A^c erfüllt sein muss

Genauer:

Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig $\Rightarrow$ A abzählbar oder A^c abzählbar

$\Rightarrow \underbrace{A^c \text{ abzählbar}}_{\Rightarrow \in \mathcal{A}}$ oder $\underbrace{(A^c)^c = A}_{\Rightarrow \in \mathcal{A}}$ abzählbar $\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) z.z. Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbare Mengen aus $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$

Beweis:

a) abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar $\Rightarrow$ Vereinigung ist in $\mathcal{A}$

b) abzählbare Vereinigung von Mengen, deren Komplement abzählbar ist:

das wird in c) auch bewiesen, steht hier nur der Vollständigkeit wegen

Seien $A_i \in \mathcal{A}$ beliebig für die gilt: A_i^c abzählbar

$\Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$, da ihr Komplement $\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)^c \underset{\text{DeMorgan}}{=} \bigcap_{i \geq 1} A_i^c \subset \underbrace{A_1^c}_{\text{abzählbar und damit in } \mathcal{A}}$ ist

Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)^c$ ist abzählbar $\Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$

c) abzählbare Vereinigung von Mengen, wo es egal ist, ob sie abzählbar sind oder nicht:

Seien $A_i \in \mathcal{A}$ beliebig, wenn alle A_i abzählbar → siehe a).
wenn alle A_i abzählbares Komplement haben → b)

→ betrachte Fall wo A_i existieren deren Komplement abzählbar ist → $\boxed{\exists A_k : A_k^c \text{ abzählbar}}$
und A_i existieren, die selbst abzählbar sind

$\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)^c = \left(\bigcap_{i \geq 1} A_i^c\right) \subset A_k^c$ ↳ abzählbar

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)^c$ ist Teilmenge einer abzählbaren Menge und damit selbst abzählbar

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \in \mathcal{A}$ für beliebig $A_i \in \mathcal{A}$