Abschnitt 14.5.5 Aufgabe 13:

zz. $N := \bigcup_{i \geq 1} N_i$ abzählbar endlich oder abzählbar unendlich vieler Lebesgue-Nullmengen $N_1, N_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ ergibt wieder eine Lebesgue Nullmenge

Bew.

Laut Aufgabenstellung gilt $N_1, N_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow N \subset \mathbb{R}^n$, da $\mathbb{R}^n$ eine sigma-Algebra darstellt und laut Definition 14.5.1 iii gilt

$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \in A \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} \Omega_i \in A$

Des weiteren sind jede Vereinigung von lebesguemessbaren Mengen wieder lebesguemessbar (14.5.2).

$\Rightarrow N_1, N_2 \ldots \subset \mathbb{R}^n$ sind lebesgue Nullmengen

$\Rightarrow \ell_n^*(N_i) = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$

zz. $\ell_n^*(N) = \ell_n^*(\bigcup_{i \geq 1} N_i) = 0$

$$\ell_n^*(N) = \ell_n^*(\bigcup_{i \geq 1} N_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subadditivität}}}{\leq} \sum_{i \geq 1} \ell_n^*(N_i) = \sum_{i \geq 1} 0 = 0$$

q.e.d