15.1 Aufgabe 4 (Gabriel Amadeus Müller, Navin Josef Suman, Felix Peter Paul)

z.z. Dirichletsche Sprungfunktion ist Lebesguemessbar (mit Def 15.1.1)

Beweis:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Dirichletsche Sprungfkt.

Definitionen wdh.

- f lebesguemessbar ($f: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

  $\iff \forall c \in \mathbb{R}: \{x \in \Omega: f(x) > c\}$ ist lebesguemessbar

---

Jetzt zum eigentlichen Beweis:

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig

Dann gibt es nur die folgenden Fälle, die man betrachten muss:

(i) $c < 0 \Rightarrow \{x \in \Omega: f(x) > c\} = \{x \in \Omega: f(x) \geq 0\} = [0,1]$

(ii) $c = 0 \Rightarrow \{x \in \Omega: f(x) > c\} = \{x \in \Omega: f(x) > 0\} = \{x \in \Omega: f(x) = 1\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

(iii) $c \in (0,1) \Rightarrow \{x \in \Omega: f(x) > c\} = \{x \in \Omega: f(x) = 1\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

(iv) $c \geq 1 \Rightarrow \{x \in \Omega: f(x) > c\} = \{x \in \Omega: f(x) > 1\} = \emptyset$

Da abgeschlossene Mengen lebesguemessbar $\Rightarrow [0,1]$ lebesguemessbar

$\emptyset$ Lebesguemessbar nach VL

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist $\Rightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar $\Rightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbare Vereinigung isolierter Punkte

$\Rightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ lebesguemessbar

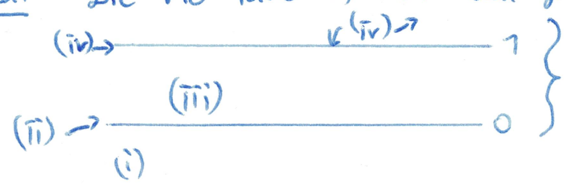
(da abzählbare Vereinigung lebesguemessbarer Mengen wieder lebesguemessbar ist)

$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in \Omega: f(x) > c\}$ lebesguemessbar

$\Rightarrow$ Dirichletsche Sprungfkt. ist lebesguemessbar!

$\square$

Bild: Die vier Fälle (i) - (iv) decken ganz $\mathbb{R}$ ab, denn



deckt ganz $\mathbb{R}$ ab → und damit gilt Beweis $\forall c \in \mathbb{R}$