# Lösung zur Aufgabe 2, Abschnitt 16.1

Vorgelegt ist die Funktion

$$f(x) = 1, \quad x \in [0,1].$$

Wir wählen $\alpha = 0$ und $\beta = 4/3$ sowie die äquidistante Zerlegung

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 = \beta$$

$$\text{mit } y_0 = 0,\ y_1 = \tfrac{1}{3},\ y_2 = \tfrac{2}{3},\ y_3 = \tfrac{3}{3},\ y_4 = \tfrac{4}{3}.$$

Mit diesen Größen ermitteln wir

$$\Omega_1 = \{x \in [0,1] : 0 \le f(x) < \tfrac{1}{3}\} = \emptyset,$$

$$\Omega_2 = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{3} \le f(x) < \tfrac{2}{3}\} = \emptyset,$$

$$\Omega_3 = \{x \in [0,1] : \tfrac{2}{3} \le f(x) < \tfrac{3}{3}\} = \emptyset,$$

$$\Omega_4 = \{x \in [0,1] : \tfrac{3}{3} \le f(x) < \tfrac{4}{3}\} = [0,1]$$

und daher

$$\ell_1^*(\Omega_1) = 0,\ \ell_1^*(\Omega_2) = 0,\ \ell_1^*(\Omega_3) = 0,$$

$$\ell_1^*(\Omega_4) = 1.$$

Als Lebesguesche Untersumme erhalten wir also

$$\sum_{k=1}^{4} y_{k-1}\, \ell_1^*(\Omega_k)$$

$$= 0 \cdot \ell_1^*(\Omega_1) + \tfrac{1}{3} \cdot \ell_1^*(\Omega_2) + \tfrac{2}{3} \cdot \ell_1^*(\Omega_3) + \tfrac{3}{3} \cdot \ell_1^*(\Omega_4)$$

$$= 0 \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{2}{3} \cdot 0 + \tfrac{3}{3} \cdot 1 = 1,$$

und die Lebesguesche Obersumme ergibt sich zu

$$\sum_{k=1}^{4} y_k\, \ell_1^*(\Omega_k)$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \ell_1^*(\Omega_1) + \tfrac{2}{3} \cdot \ell_1^*(\Omega_2) + \tfrac{3}{3} \cdot \ell_1^*(\Omega_3) + \tfrac{4}{3} \cdot \ell_1^*(\Omega_4)$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{2}{3} \cdot 0 + \tfrac{3}{3} \cdot 0 + \tfrac{4}{3} \cdot 1 = \tfrac{4}{3}.$$

Damit sind die gesuchten Größen ermittelt. $\square$