15.2.3 Aufgabe 6

Donnerstag, 19. November 2020 16:15

Sei $\Omega = [0,1] = \underbrace{([0,1] \cap \mathbb{Q})}_{\Omega_1} \cup \underbrace{([0,1] \setminus \mathbb{Q})}_{\Omega_2}$

Wir definieren

$$\varphi_n(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \chi_{\Omega_1}(x) + 0 \cdot \chi_{\Omega_2}(x)$$

Dann gilt punktweise Konvergenz, da

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \chi_{\Omega_1}(x) + 0 \cdot \chi_{\Omega_2}(x)\right) = \chi_{\Omega_1}(x) + 0 \cdot \chi_{\Omega_2}(x)$$

$$= \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \chi_D(x)$$

Außerdem gilt auch gleichmäßige Konvergenz, da

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x) - \chi_D(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left(\underbrace{\left|1-\frac{1}{n}-1\right|}_{x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}, \underbrace{|0-0|}_{x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0$$