

Aufgabe 16.1.6

Christoffel, Seber, Mühlenbrock

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \rho: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Betrachte Zerlegung $\Omega_1 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $\Omega_2 = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.
Bestimme Youngsche Unter- & Obersumme.

$$\text{Untersumme: } \sum_{k=1}^2 \inf_{x \in \Omega_k} f(x) \cdot l_k^*(\Omega_k)$$

$$= \inf_{x \in \Omega_1} f(x) l_1^*(\Omega_1) + \inf_{x \in \Omega_2} f(x) l_2^*(\Omega_2) \quad \begin{array}{l} f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega_1 \\ f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_2 \end{array}$$

$$= l_1^*(\Omega_1) + 0$$

$$= 0 \quad \text{denn } l_1^*([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0, \text{ nach 14.4.5. \&G7}$$

$$\text{Obersumme: } \sum_{k=1}^2 \sup_{x \in \Omega_k} f(x) \cdot l_k^*(\Omega_k)$$

$$= \sup_{x \in \Omega_1} f(x) l_1^*(\Omega_1) + \sup_{x \in \Omega_2} f(x) l_2^*(\Omega_2) \quad \text{s.o.}$$

$$= l_1^*(\Omega_1) + 0$$

$$= 0 \quad \text{s.o.}$$