16.1 Aufgabe 3 Pauline Mies, Kira Drebes, Max Befert

Es bezeichne $f(x)$ die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f: [0,1] \to \mathbb{R} \text{ vermöge } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ermitteln Sie die lebesguesche Ober- und Untersumme

Lösung: Wähle die äquidistante Zerlegung, wobei

$\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}$ ist,

$\alpha = y_0 = -\frac{1}{2}$, $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 1$, $y_4 = \frac{3}{2} = \beta$,

also $y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

Mit diesen Größen ermitteln wir:

$\Omega_1 = \{x \in [0,1] : -\frac{1}{2} \leq f(x) < 0\} = \emptyset$

$\Omega_2 = \{x \in [0,1] : 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}\} = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

$\Omega_3 = \{x \in [0,1] : \frac{1}{2} \leq f(x) < 1\} = \emptyset$

$\Omega_4 = \{x \in [0,1] : 1 \leq f(x) < \frac{1}{2}\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

und daher

$\ell_1^*(\Omega_1) = 0$

$\ell_1^*(\Omega_2) = 1$, da gilt: $1 = \ell_1^*([0,1])$

$= {}^{*}\ell_1^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) + \ell_1^*([0,1] \setminus \mathbb{Q})$

$= 0 + \ell_1^*([0,1] \setminus \mathbb{Q})$

$\Rightarrow \ell_1^*([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$

$\ell_1^*(\Omega_3) = 0$

$\ell_1^*(\Omega_4) = 0^{*}$, weil es eine abzählbare Menge von Nullmengen ist

Siehe 14.4, Aufgabe 7.

Lebesgue-Untersumme: $\sum_{k=1}^{4} y_{k-1}\, \ell_1^*(\Omega_k) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0$

$\underline{\underline{= 0}}$

Lebesgue-Obersumme:

$$\sum_{k=1}^{4} y_k \, l_1^*(\Omega_k) = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Damit sind die gesuchten Größen ermittelt