Abgabe Erik Wench, Lucas Eisel, Felix Wimmer

Nummer 4:

Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesguesche Nullmenge. Beweisen Sie, dass N dann Lebesguemessbar im Caratheodoryschen Sinn ist.

Bew. Es gilt: $\ell_n^*(N) = 0$, da N = Nullmenge

Aus Subadditivität folgt: $\forall\, C, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\ell_n^*(C) \leq \ell_n^*(C \cap \Omega) + \ell_n^*(C \cap \Omega^c)$$

Also in unserem Beispiel:

$$\ell_n^*(C) \leq \ell_n^*(C \cap N) + \ell_n^*(C \cap N^c)$$

Aus Monotonie des Lebesgue-Maßes folgt nun, da $C \cap N \subseteq N$ & $C \cap N^c \subseteq C$

$$\ell_n^*(C) \leq \ell_n^*(C \cap N) + \ell_n^*(C \cap N^c) \leq \ell_n^*(N) + \ell_n^*(C)$$
$$= 0 + \ell_n^*(C)$$

$\Rightarrow$ Also muss überall Gleichheit gelten $\square$