14.5.5

Dominik Lader, Julian Lang, Philipp Kötz,

Aufgabe 2

Was versteht man unter der kleinsten σ-Algebra in $\mathbb{R}^n$?
Begründe, dass es sich tatsächlich um eine σ-Algebra handelt.

Definition σ-Algebra:
Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine σ-Algebra, falls gilt:

(i) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) Ist $\Omega \in \mathcal{A}$, so gilt auch $\Omega^c \in \mathcal{A}$

(iii) Sind abzählbar endlich oder unendlich viele $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$ so gilt auch $\bigcup_{i \geq 1} \in \mathcal{A}$

z.z.: $\mathcal{A} := \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ ist eine σ-Algebra

Prüfe (i), (ii), (iii)

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ offensichtlich

(ii) $\emptyset \in \mathcal{A}$ z.z. $\emptyset^c = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ auch offensichtlich
$\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ z.z. $\mathbb{R}^{n^c} = \emptyset \in \mathcal{A}$ auch offensichtlich

(iii) $\emptyset \cup \mathbb{R}^n = (\mathbb{R})^n \in \mathcal{A}$ siehe (ii)

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ ist die kleinste σ-Algebra, da bei einem System von Teilmengen mit Mächtigkeit $= 1$ immer die Voraussetzung (ii) nicht erfüllt wäre. Daher dürfen weder $\emptyset$ noch $\mathbb{R}^n$ entfernt werden.

5