Abschnitt 15.1 - Aufgabe 7

Kastriot Cakolli
Johanna Krömer
Juela Spahiu

Beweisen Sie, dass stetige Funktionen auf Lebesguemessbaren Mengen Lebesguemessbar sind.

Lebesguemessbare Funktionen

Definition: Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesguemessbare Menge. Die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *Lebesguemessbar,* falls für jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ folgende Menge Lebesguemessbar ist

$$\{x \in \Omega \, : \, f(x) > c\}.$$

Behauptung: Stetige Funktionen auf Lebesguemessbaren Mengen sind Lebesguemessbar.

Beweis: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesguemessbare Menge und $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine stetige Funktion.

$(c,\infty) \subset \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig sind offen. Da f nach Voraussetzung stetig ist, sind somit auch die Mengen $f^{-1}((c,\infty))$ offen.

Stetigkeit = „Urbilder offener Mengen sind offen"

Definiere $\Theta := (c,\infty)$

Das bedeutet, dass das Urbild $f^{-1}(\Theta) = \{x \in \Omega : f(x) > c\} \subset \mathbb{R}^n$ mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$ offen ist. Die Menge $f^{-1}(\Theta)$ muss ebenfalls Lebesguemessbar sein. Nach Satz 14.5.3 der VL ist jede offene Menge Lebesguemessbar und somit auch $f^{-1}(\Theta)$.

$\Longrightarrow$ f ist Lebesguemessbar