15.2 Approximation Lebesguemessbarer Funktionen

- Aufgabe 7

Anna Loch
Adina Reichert
Zeki Aydin

Beh.: $|f(x) - \varphi^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus \Theta_n$

(Punkt 4 Beweisidee 15.2.2)

Bew.: Sei $j \in \{0, 1, \dots, n \cdot 2^n\}$, dann gilt für $\ell \in \{2j, 2j+1\}$

$\frac{j}{2^n} \leq \frac{\ell}{2^{n+1}}$ & $\frac{n \cdot 2^n}{2^n} \leq \frac{\ell}{2^{n+1}}$ für $\ell \in \{n\, 2^{n+1}, \dots, (n+1)\, 2^{n+1}\}$

$\Rightarrow \varphi^{(n)}(x) \leq \varphi^{(n+1)}(x) \quad \forall\, x \in \Omega$

Wir setzen $x \in \Omega$ jetzt fest & zeigen

$$\lim_{n \to \infty} \varphi^{(n)}(x) = f(x)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein festes $j = j(n, x)$, s.d.

$x \in \Omega_{n,k} \Rightarrow \varphi^{(n)}(x) = \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine obere Schranke

Falls $f(x) = \infty$, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ $\varphi^{(n)}(x) = n$

Falls $f(x) < \infty$, dann gilt für ein $\varepsilon > 0$, dass wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, s.d. $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ & $f(x) < n_0$.

Wenn $n \geq n_0$, dann gilt:

$$f(x) - \varphi^{(n)}(x) \leq 2^{-n} \leq 2^{-n_0} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \varphi^{(n)}(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow |f(x) - \varphi^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2^n} \qquad \square$$