Marie Sophia Ragsch, Kai Christian Burkhardt,
Fabienne Brabänder

Beispiel:

Es sei $\{q_1, q_2, \dots\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.
Wir setzen $f^{(k)}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{q_1, \dots, q_k\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Sei k beliebig

Für $c<0$: $\{x \in [0,1] \mid f^{(k)}(x) > c\} = [0,1]$ ist Lebesguemessbar, da Intervalle Lebesguemessbar sind.

Für $0 \leq c < 1$: $\{x \in [0,1] \mid f^{(k)}(x) > c\} = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ist Lebesguemessbar, da endliche Mengen Lebesguemessbar sind.

Für $c \geq 1$: $\{x \in [0,1] \mid f^{(k)}(x) > c\} = \{\emptyset\}$ ist Lebesguemessbar, da die leere Menge Lebesguemessbar ist.

$\Rightarrow f^{(k)}(x)$ ist Lebesguemessbar

$\Rightarrow$ Da k beliebig ist jede Funktion $f^{(k)}(x)$ Lebesguemessbar

Nach der Bemerkung aus Paragraph 15.1.4 folgt, dass dann auch die Grenzfunktion, die Dirichlet-Sprungfunktion, Lebesguemessbar ist

Nach dem Lebesgueschen Kriterium zur Riemannintegrierbarkeit aus Paragraph 17.1.4 ist jede Funktion $f^{(k)}(x)$ Riemannintegrierbar, da $f^{(k)}(x)$ auf $[0,1]$ nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

Wie in Paragraph 14.1.1 bereits erklärt, ist die Dirichlet-Sprungfunktion nicht Riemannintegrierbar.