Lucas Eisel, Erik Weinel, Felix Wimmer

Es gilt: $\Omega = [0,1] = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q})$

$$= \Omega_1 \cup \Omega_2$$

$$\varphi_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \chi_{\Omega_1}(x) + 0\, \chi_{\Omega_2}(x)$$

<u>punktweise Konvergenz gilt, da:</u>

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \chi_{\Omega_1}(x) + 0 \cdot \chi_{\Omega_2}(x) \right)$$

$$= \chi_{\Omega_1}(x) + 0 \cdot \chi_{\Omega_2}(x)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{~~sonst~~ für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \chi_D(x)$$

Gleichmäßige Konvergenz:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |\varphi_n(x) - \chi_D(x)| = \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} \left(\left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \Rightarrow \text{Ja, es gilt auch gleichmäßige Konvergenz!}$$