16.3, Aufgabe 6 von: Sebastian Neumann, Malte Pfalzgraf, Melanie Schäfer

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ℓ-mb. Menge, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien zwei einfache Funktionen mit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{s} c_i \chi_{\Omega_i}(x)$, $c_i \in \mathbb{R}$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{t} d_j \chi_{\Theta_j}(x), \quad d_j \in \mathbb{R}$$

und $\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{s} \Omega_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{t} \Theta_j$ (diese Vereinigungen sind jeweils disjunkt!) (*) 16.2.1

z.z. $\int_\Omega \{\varphi(x) + \psi(x)\} \, d\ell_n(x) = \int_\Omega \varphi(x) \, d\ell_n(x) + \int_\Omega \psi(x) \, d\ell_n(x)$

Beweis

Prüfe zunächst Additivität von Funktionen:

$$\varphi(x) + \psi(x) = \sum_{i=1}^{s} c_i \chi_{\Omega_i}(x) + \sum_{j=1}^{t} d_j \chi_{\Theta_j}(x)$$

$$\boxed{\Omega = \bigcup_{\substack{i \le s \\ j \le t}} (\Omega_i \cap \Theta_j)}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{s} c_i \sum_{j=1}^{t} \chi_{\Omega_i \cap \Theta_j}(x) + \sum_{j=1}^{t} d_j \sum_{i=1}^{s} \chi_{\Omega_i \cap \Theta_j}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (c_i + d_j) \chi_{\Omega_i \cap \Theta_j}(x)$$

wir wissen: $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}$ sind einfache Funktionen

$$\overset{16.2.1}{\Longrightarrow} \int_\Omega \varphi(x) \, d\ell_n(x) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{s} c_i \ell_n^*(\Omega_i) \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\int_\Omega \psi(x) \, d\ell_n(x) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{t} d_j \ell_n^*(\Theta_j) \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \{\varphi(x) + \psi(x)\} \, d\ell_n^*(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (c_i + d_j) \ell_n^*(\Omega_i \cap \Theta_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_i \sum_{j=1}^{t} \ell_n^*(\Omega_i \cap \Theta_j) + \sum_{j=1}^{t} d_j \sum_{i=1}^{s} \ell_n^*(\Omega_i \cap \Theta_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_i \ell_n^*(\Omega_i) + \sum_{j=1}^{t} d_j \ell_n^*(\Theta_j)$$

$$\overset{(*)}{=} \int_\Omega \varphi(x) \, d\ell_n(x) + \int_\Omega \psi(x) \, d\ell_n(x) \quad \square$$