

# 16.3.5 Aufgabe 3

Sonntag, 29. November 2020 13:29

Abgabe: Julia Hasselwander, Stefanie Schröder, Paul Schöner

③ i) 
$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ii) 
$$\int_{[0,1]} f(x) d\lambda_1(x) = \int_{[0,1]} 1 d\lambda_1(x) \stackrel{\text{einfache Fkt}}{=} 1 \cdot \lambda_1^*([0,1]) = 1$$

iii) 
$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f^{(k)}(x) d\lambda_1(x) \stackrel{\text{Mon. Konv.}}{=} \int_{[0,1]} \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) d\lambda_1(x) = \int_{[0,1]} f(x) d\lambda_1(x) \stackrel{\text{ii)}}{=} 1$$

\* zu zeigen: i)  $f^{(k)}(x) \leq f^{(k+1)}(x)$   
 $\hookrightarrow f^{(k)}(x) = 1 - x^k \leq 1 - x^{k+1} = f^{(k+1)}(x) \quad \forall k \quad \checkmark$

ii)  $f^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall k$   
 $\hookrightarrow f^{(k)}(x) = 1 - x^k \geq 0 \quad \forall k \quad \checkmark$

iii)  $f^{(k)}(x)$  Lebesguemessbar  
 $\hookrightarrow f^{(k)}(x)$  ist stetig und  $[0,1]$  ist Lebesguemessbare Menge  $\Rightarrow f^{(k)}(x)$  ist Lebesguemessbar  $\checkmark$

$\Rightarrow$  Monotone Konvergenz ist anwendbar.