f $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Ω lebesguemessbar und $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ lebesgueintegrierbar.

$\Rightarrow$ i) $\forall \lambda > 0$ gilt $\ell_n^*(\Omega_\lambda) < \infty$

mit $\Omega_\lambda := \{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}$

ii) f ist fast überall endlich

Beweis: $\lambda > 0$

i) f ist lebesgueintegrierbar und $\ell_n^*(\Omega_\lambda)$ existiert

$$\Rightarrow \ell_n^*(\Omega_\lambda) = \ell_n^*(\{x \in \Omega : \underset{\uparrow \text{ nicht negativ}}{|f(x)|} > \lambda\}) \underset{\uparrow \text{ Tschebyschev}}{\leq} \frac{1}{\lambda} \int_\Omega f(x)\, d\ell_n(x)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_\Omega \frac{|f(x)| + f(x)}{2}\, d\ell_n(x) - \int_\Omega \frac{|f(x)| - f(x)}{2}\, d\ell_n(x) < \infty$$

laut Aufgabe ist f lebesgueintegrierbar

Diese Differenz ist laut Definition 16.2.3 endlich

ii) Angenommen $\Theta := \{x \in \Omega \mid f(x) \text{ nicht endlich}\}$ sei keine Nullmenge:

$\ell_n^*(\Theta_\lambda) = \alpha > 0$. Da $|f|$ messbar und integrierbar ist, gilt $\Theta := \{x \in \Omega \mid |f(x)| = \infty\}$

Insbesondere gilt für jedes $x \in \Theta$ und $\lambda > 0$:
$|f(x)| > \lambda$

$\rightarrow$ $\Theta \subset \Omega_\lambda = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > \lambda\}$, also

$$0 < \alpha = \ell_n^*(\Theta) \leq \ell_n^*(\Omega_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_\Omega |f(x)| \, d\ell_n(x) \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$$

↯

also $\ell_n^*(\Theta) = 0$

q.e.d.