Aufgabe 6

Z.Z: $\sim$ aus 17.4.3 ist eine Äquivalenzrelation

Bew: $f \sim g \Rightarrow f = g$ fast überall in Ω

① reflexiv:

Sei $f^{(k)}$ eine Funktionenfolge die punktweise fast überall gegen $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert.

$$\lim_{k \to \infty} f^{(k)} = f$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f^{(k)} = \lim_{k \to \infty} f^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow f = f$$

② Symmetrie: Sei $\lim_{k \to \infty} g^{(k)} = g$

$f \sim g$

$\Leftrightarrow f = g$ fast überall $\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} f^{(k)} = \lim_{k \to \infty} g^{(k)}$ fast überall

$\Rightarrow f = \lim_{k \to \infty} f^{(k)} = \lim_{k \to \infty} g^{(k)} = g \qquad \Leftrightarrow g = \lim_{k \to \infty} g^{(k)} = \lim_{k \to \infty} f^{(k)} = f$

Def. fast überall

$$\Rightarrow f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$$

③ transitiv: Sei $\lim_{k \to \infty} h^{(k)} = h$

- $f \sim g$

$\Leftrightarrow f = g$ fast überall

$\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} f^{(k)} = \lim_{k \to \infty} g^{(k)}$

- $g \sim h$

$\Leftrightarrow g = h$ fast überall

$\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} g^{(k)} = \lim_{k \to \infty} h^{(k)}$

$$\Rightarrow f = \lim_{k \to \infty} f^{(k)} = \lim_{k \to \infty} g^{(k)} = \lim_{k \to \infty} h^{(k)} = h$$

$$\Rightarrow f \sim h$$

$\square$