Lukas Antoine, Philipp Maas, Johannes Beffinger

16.3.5

Nr. 4

Es sei: $f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , \frac{1}{k^2} < x \leq 1 \end{cases} \quad x \in [0,1]$

i) punktweiser Grenzwert ~~von~~ $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ii) $$\int_{[0,1]} f(x)\, d\ell_1(x) = \int_0^0 0\, d\ell_1(x) + \int_{(0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\ell_1(x)$$

$$= [2\sqrt{x}]_{(0,1]} = \underline{\underline{2}}$$

iii) $$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f^{(k)}(x)\, d\ell_1(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{\int_0^{\frac{1}{k^2}} 0\, d\ell_1(x)}_{=0} + \int_{\frac{1}{k^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\ell_1(x) \Big)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left([2\sqrt{x}]_{\frac{1}{k^2}}^1 \right) = \lim_{k\to\infty} 2 - 2\sqrt{\frac{1}{k^2}} = \underline{\underline{2}}$$

Satz der monotonen Konvergenz

- alle $f^{(k)}(x)$ $\forall x \in [0,1]$ ~~sind~~ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ sind nicht negativ
- $\forall k \in \mathbb{N}_0$ und $\forall x \in [0,1]$ gilt $f^{(k+1)}(x) - f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{1}{(k+1)^2} \text{ oder } \frac{1}{k^2} < x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{wenn } \frac{1}{(k+1)^2} < x \leq \frac{1}{k^2} \end{cases}$

  und somit nicht negativ $\Rightarrow$ monoton wachsende Folge
- Für L-Messbarkeit betrachte

$c > 1$: $\{x \in [0,1]: f^{(k)}(x) \geq c\} = \emptyset \Rightarrow$ L-Messbare Menge

$c \leq 0$: $\{x \in [0,1]: f^{(k)}(x) \geq c\} = [0,1] \Rightarrow$ abgeschlossen, L-messbar

$0 < c < 1$: $\{x \in [0,1]: f^{(k)}(x) \geq c\} = \{\frac{1}{k^2} < x \leq 1\} = \{\frac{1}{\sqrt{x}} \geq c : \frac{1}{k^2} < x \leq 1\}$

$= \{\frac{1}{k^2} < x \leq 1 : \frac{1}{\sqrt{x}} \geq c\} \Rightarrow$ abgeschlossen und L-messbar

$\Rightarrow$ Satz d. monotonen Konvergenz gilt