Aufgabe 7

Satz Auf der Lebesguemessbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei vermittels $f^{(k)}: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k = 1, 2, \ldots$, eine Folge nichtnegativer, monoton wachsender und Lebesguemessbarer Funktionen gegeben mit

$$0 \leq f^{(1)}(x) \leq f^{(2)}(x) \leq \ldots \text{ in } \Omega \text{ und } \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = f(x)$$

z.z.: $\int_\Omega f(x)\, d\ell n(x) \geq 0$

Beweis

Aus der Vorlesung wissen wir: $\varphi(x)$ nichtnegativ, Lebesguemessbare einfache Funktion mit der Darstellung

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{\Omega_k}(x) \quad \text{mit reellen Zahlen } c_k \in \mathbb{R}$$

Def.: Unter dem Lebesgueintegral einer nichtnegativen einfachen Funktion $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ verstehen wir den Ausdruck

$$\int_\Omega \varphi(x)\, d\ell n(x) := \sum_{k=1}^{m} c_n \ell n^*(\Omega_k) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

D.h.:

$$\int_\Omega \varphi(x)\, d\ell n(x) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_n}_{\geq 0} \overbrace{\ell n^*(\Omega_n)}^{\geq 0} \geq 0$$

≥ 0, da φ nichtnegative Funktion → $\ell n^*(\Omega_k)$ nichtnegativ

≥ 0 $\forall n$, da $\varphi(x)$ nichtnegative Funktion, muss auch c_n auch nicht negativ sein

Summe muss also auch ≥ 0

□