16.4 Aufgabe 2

Freitag, 27. November 2020 10:53

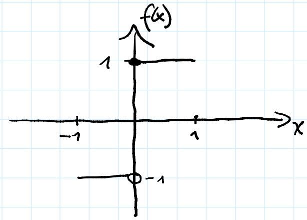
Gabriel Amadeus Müller
Navin Josef Suman Dass
Felix Peter Paul

Z.z. Satz 16.4.2 gilt nicht falls $f(x)$ beliebige Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annimmt.

Beweis durch Gegenbeispiel

Sei $\Omega := [-1;1]$ und $f: \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

mit $f(x) = \begin{cases} 1 & , \forall x \geq 0 \\ -1 & , \forall x < 0 \end{cases}$ mit $x \in \Omega$



Dann ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ eine Lebesguemessbare Menge, da Ω eine abgeschlossene Menge ist.
$f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine Lebesguemessbare Funktion.
Dann gilt:

$$\int_{[-1,1]} f(x)\, d\lambda_1(x) \overset{*}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx$$
$$= [-x]_{-1}^{0} + [x]_{0}^{1}$$
$$= [0-(-(-1))] + [1-0]$$
$$= -1+1 = 0$$

(*) Satz (Lebesguesches Kriterium zur Riemannintegrierbarkeit)

- $[-1,1] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < -1 < 1 < \infty$ ist ein kompaktes Intervall ✓
- $f: [-1,1] \to [-1,1]$ eine beschränkte Funktion ✓
- f ist fast überall in $[-1,1]$ stetig, da f eine Sprungfunktion ✓

$\overset{\text{Satz}}{\Leftrightarrow}$ f ist Riemannintegrierbar

$\Rightarrow$ $f(x)$ auf $[-1;1]$ auch Lebesgue-integrierbar und

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{[-1,1]} f(x)\,d\lambda_1(x)$$

, aber $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$

$\Rightarrow$ f ist nicht fast überall 0 in Ω.

$\Rightarrow$ Satz 16.4.2 gilt nicht falls $f(x)$ beliebige Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annimmt.

$\square$