Übungsaufgabe zum Kapitel 17.1

Lea Reinheimer

Jessica Schilling

Florian Weinheimer

17.1.5 Aufgabe 10

Beweisen Sie unter Verwendung des Lebesgueschen Kriteriums zur Riemann-integrierbarkeit, dass die Dirichletsche Sprungfunktion

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in [0,1]$$

nicht Riemannintegrierbar auf $[0,1]$ ist.

Voraussetzung: $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to [\alpha, \beta]$ beschränkte Funktion

Aus dem Lebesgueschen Kriterium zur Riemannintegrierbarkeit wissen wir, dass $f(x)$ auf $[a,b]$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn sie fast überall in $[a,b]$ stetig ist, d.h. wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Lebesguesche Nullmenge bildet.

Hier: $f: [0,1] \to [0,1]$

Zeige daher, dass $\chi_D(x)$ niergends stetig ist:

$\forall \delta \ \exists \ 1 > \varepsilon > 0$ mit $|x - x_0| < \delta$ $\exists x_0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

mit $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ (keine Lebesgue-Nullmenge)

und $x_0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$: $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$

in allen $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \chi_D(x)$ ist in x_0 fast überall nicht stetig und $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ keine Lebesgue-Nullmenge

$\Rightarrow \chi_D(x)$ ist nicht Riemannintegrierbar