17.2.6 Christoffel, Mühlenbrock, Seber

A3)

Prinzip von Cavalieri

Version 1:

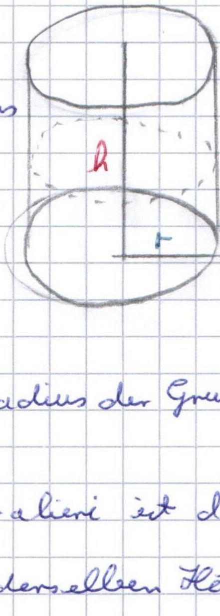
Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in gleichen Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.

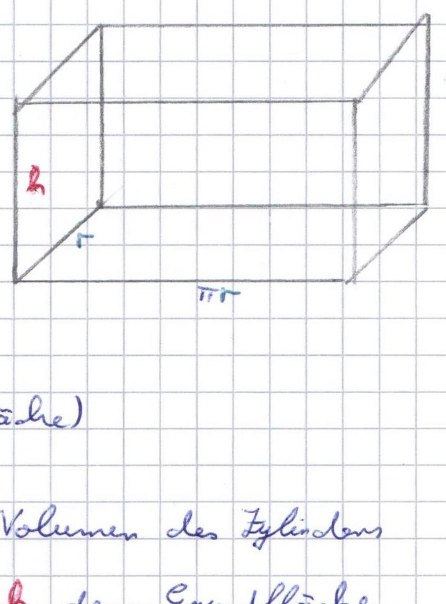
Version 2:

Liegen zwei Körper zwischen zueinander parallelen Ebenen E_1 und E_2 und werden sie von jeder zu diesen parallelen Ebene E' so geschnitten, dass gleich große Schnittflächen entstehen, so haben die Körper gleiche Volumen.

Anwendungsbeispiele

1. Zylinder:





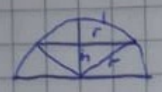
Die Schnitte eines Zylinders mit Ebenen senkrecht zur Rotationsachse sind die Kreisscheiben mit Flächeninhalt πr^2 (r = Radius der Grundfläche)

Nach dem Prinzip von Cavalieri ist das Volumen des Zylinders gleich dem eines Quaders derselben Höhe h, dessen Grundfläche den selben Flächeninhalt hat, z.B. r und πr.

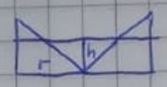
Das Volumen des Zylinders ist demnach $\pi r^2 h$.

2. Halbkugel

Betrachte eine Halbkugel mit Radius r und ein Zylinder mit derselben Grundfläche aus dem ein auf der Spitze stehender Kreiskegel herausgeschnitten wurde. Durch beide verläuft in der Höhe h eine Ebene parallel zur Grundfläche.



Schnitt der Halbkugel



Schnitt des Zylinders

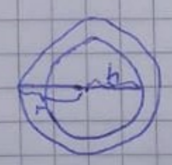
Aus dem Satz des Pythagoras folgt:

$$r' = \sqrt{r^2 - h^2}$$

$$\Rightarrow A_{Schnittfläche} = \pi \cdot (r')^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2)$$

Für die Schnittfläche des Zylinders gilt nun:

$$\pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2)$$
$$= A_{Schnittfläche}$$



Damit erfüllen beide Körper den Satz von Cavalieri und das Volumen der Halbkugel lässt sich über das Volumen des Zylinders (minus das Volumen des Kreiskegels) berechnen:

$$\pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Für eine Kugel folgt dann das Volumen:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$