Daniel Kuller,
Matea Rakov

Gruppe 3: Abgabe 2 06.12.2020

17.2 Die Sätze von Fubini & Cavalieri

Aufgabe 9:

Berechnen Sie den von dem Graphen der Funktion

$$f(x) := x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x, \quad x \in [0,1],$$

und der x-Achse eingeschlossenen Flächeninhalt.
Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Lösung:

Nullstellen von f in $[0,1]$:

$$0 \overset{!}{=} x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 0 = x\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right) \quad | \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_2 = -\frac{1+\sqrt{17}}{4}}$$ ist nicht im Intervall $[0,1]$.

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen von f in $[0,1]$ bei

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4}$$

Dann:

$$\Rightarrow A = \left| \int_0^{\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}} x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \; dx \right| + \left| \int_{\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}}^{1} x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \, dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}}^{1} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} \right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} \right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} \right)^2 - 0 \right|$$

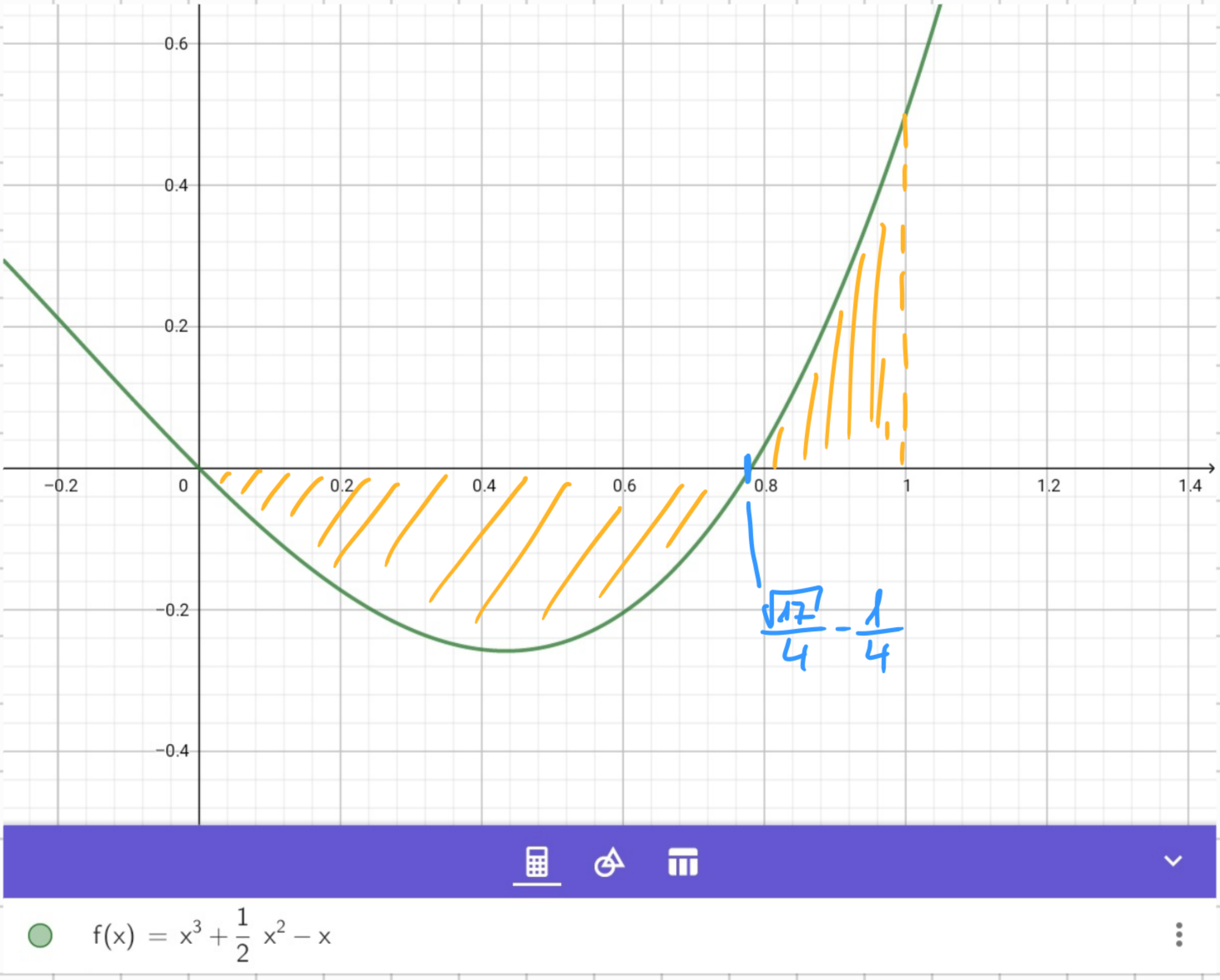
$$+ \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} \right)^4 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} \right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} \right)^2 \right) \right|$$

$$\approx |-0{,}13| + |0{,}05|$$

$$\approx 0{,}13 + 0{,}05$$

$$\approx 0{,}18$$

Skizze:



0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
$\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4}$
$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$