Gabriel Amadeus Müller
Navin Josef Suman Dass
Felix Peter Paul

17.3 Aufgabe 4

Berechne den Inhalt

$$A := \int_B 1 \, d\lambda_2(x,y)$$

der zweidimensionalen Kreisscheibe

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Lösung:

Wir setzen zunächst

$$\tilde{B} := B \setminus \left[\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, \, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1^2\} \right]$$

und führen auf der offenen Menge

$$\Omega := (0,1) \times (0, 2\pi)$$

zweidim. Polarkoordinaten ein vermittels

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \tilde{B} \quad , \quad \Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die Abb. $\Phi(r, \varphi)$ ist auf Ω stetig diffbar.

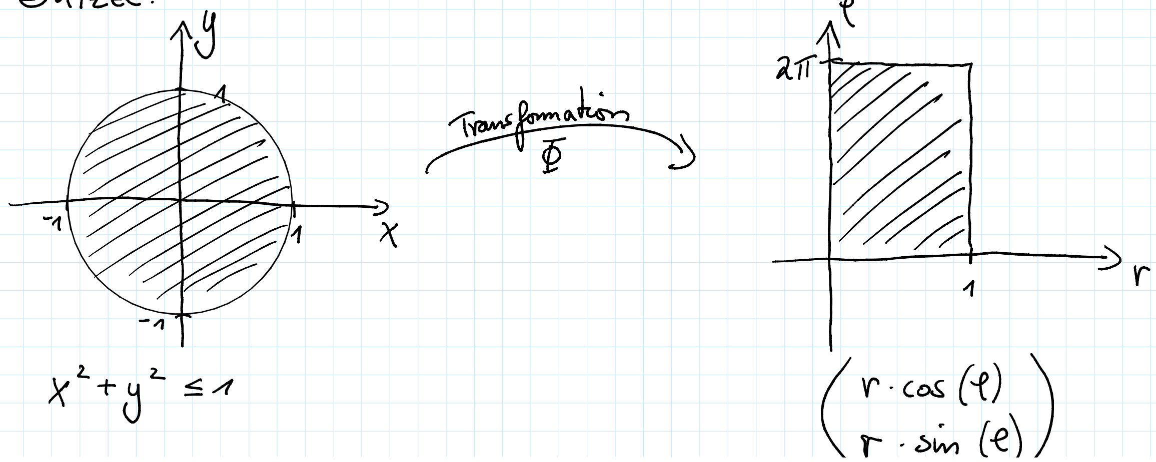
$$\partial \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \det(\partial \Phi(r, \varphi)) &= \cos(\varphi) \cdot r \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot (-r \cdot \sin(\varphi)) \\ &= r \cdot \cos^2(\varphi) + r \cdot \sin^2(\varphi) \\ &= r \, (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= r \neq 0 \quad \forall \, r \in (0,1) \end{aligned}$$

Auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ stellt $\Phi(r, \varphi)$ einen Diffeomorphismus auf $\tilde{B}$ dar, was nachträglich die Wahl von $\tilde{B}$ was sich von B nur durch eine Lebesgue Nullmenge unterscheidet, rechtfertigt

Skizze:



$x^2+y^2 \leq 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Dann ist $f: \Phi(r,\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lebesgue integrierbare Funktion wenn $(f\circ\Phi(r,\varphi))\,|\det \partial\Phi(r,\varphi)|$ über Ω Lebesgueintegrierbar ist und in diesem Fall gilt:

$$\int_B 1 \, d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathring{B}} 1 \, d\lambda_2(x,y) = \int_\Omega r \, d\lambda_2(r,\varphi)$$

Satz Fubini

$$\overset{\text{Satz Fubini}}{=} \int_{(0,1)} \int_{(0,2\pi)} r \, d\lambda_1(\varphi)\, d\lambda_1(r) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr$$

Satz Lebesguesches Kriterium zum Riemannintegrierbarkeit

$$= \int_0^1 \left[\varphi\cdot r\right]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi\cdot r \, dr$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot r^2\right]_0^1 = \pi\cdot 1^2 = \pi$$

$\Rightarrow A = \pi$