Weiterführende Analysis für das Lehramt

Gruppe 3
Abgabe 3
Querbach, Domani, Liesenmeier

14.6 Approximation Lebesguemessbaren Mengen: Aufgabe 2

Sei $\Omega = [0,1]$

Nach 14.5.3 ist Ω damit Lebesguemessbar und es gilt:

$$l_n^*(C) = l_n^*(C \cap \Omega) + l_n^*(C \cap \Omega^c) \qquad (14.6(i))$$

Wähle nun $0 < \varepsilon = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Wähle dann $\Sigma = (0 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k})$

Damit gilt $\Omega \subseteq \Sigma$

Es gilt $l_n^*(\Omega) = \inf \{ \sum_{i \geq 1} |Q_i| : \Omega \subseteq \bigcup_{i \geq 1} Q_i, Q_i \subset \mathbb{R}^n \text{ halboffen Quader} \}$

$$= \lim_{k \to \infty} (1 + \tfrac{1}{k} - (0 - \tfrac{1}{k})) = 1 \quad ✓$$

Es gilt weiterhin

$$l_n^*(\Sigma \setminus \Omega) = l_n^*((-\tfrac{1}{k}, 0] \cup [1, 1 + \tfrac{1}{k}))$$

Nach 14.4.2

$$= l_n^*((-\tfrac{1}{k}, 0]) + l_n^*([1, 1 + \tfrac{1}{k}))$$

Für $k \to \infty$

- gilt $l_n^*((-\frac{1}{k}, 0]) = \frac{1}{k} \quad k \to \infty \quad l_n^*((-\frac{1}{k}, 0]) = 0$
- gilt $l_n^*([1, 1 + \frac{1}{k})) = \frac{1}{k} \quad k \to \infty \quad l_n^*([1, 1 + \frac{1}{k})) = 0$

Also gilt:

$$\Rightarrow l_n^*((-\tfrac{1}{k}, 0]) + l_n^*([1, 1 + \tfrac{1}{k}))$$

$$= 0 \leq \frac{1}{k} = \varepsilon$$