11.12.20

Kapitel 17.3 Aufgabe 2

Gruppe 2-7
Franziska Geis
Jana Müller
Clara Schmidt

1) Berechnen Sie die Länge der logarithmischen Spirale in $\mathbb{R}^2$.
2) Skizzieren Sie die Kurve.

1) $\phi(x) = (e^x \cos(2\pi x), e^x \sin(2\pi x)), \quad x \in [0, 2\pi]$

$\phi'(x) = (e^x \cos(2\pi x) + e^x(-\sin(2\pi x) \cdot 2\pi), e^x \sin(2\pi x) + (e^x \cos(2\pi x) \cdot 2\pi))$

$$L[\phi] = \int_0^{2\pi} |\phi'(x)| \, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2x} \cdot (\cos(2\pi x) - 2\pi \sin(2\pi x))^2 + e^{2x} \cdot (\sin(2\pi x) + 2\pi \cos(2\pi x))^2} \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2x}} \cdot \left(\cos^2(2\pi x) - 4\pi \cos(2\pi x)\sin(2\pi x) + 4\pi^2 \sin^2(2\pi x) + \sin^2(2\pi x) + 4\pi \cos(2\pi x)\sin(2\pi x) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi x)\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^{2\pi} e^x \cdot \left(\cos^2(2\pi x) + \sin^2(2\pi x) + 4\pi^2 (\sin^2(2\pi x) + \cos^2(2\pi x))\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^{2\pi} e^x \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2} \, dx$$

$$= e^x \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= (e^{2\pi} - 1) \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2}$$

$$\approx 3400,6$$

2)