17.3 Nr. 8

(Abgabe von Sebastian Neumann, Malte Pfalzgraf, Melanie Schäfer)

Gegeben: $\Phi(u,v) = (\sin u, \cos u, v)$, $(u,v) \in \Omega := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 2\pi], v \in [-1, 1]\}$

Berechnung des Inhalts $A(\Phi(\Omega))$ der von $\Phi(u,v)$ erzeugten Zylinderfläche:

Berechnung der Jacobi-Matrix: $\partial\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ -\sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ -\cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\| = \left\| \begin{pmatrix} -\sin u \\ -\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u + 0} = \sqrt{1} = 1$$

Benutze Formel aus Aufgabe 7:

$$A(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega 1 \, d\ell_2(u,v) = \int_{[0,2\pi]\times[-1,1]} 1 \, d\ell_2(u,v) \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} 1 \, du \, dv = \int_0^{2\pi} [u]_{-1}^{1} \, dv = \int_0^{2\pi} 2 \, dv = [2v]_0^{2\pi} = \underline{\underline{4\pi}}$$

(17.1.4) Vorlesung