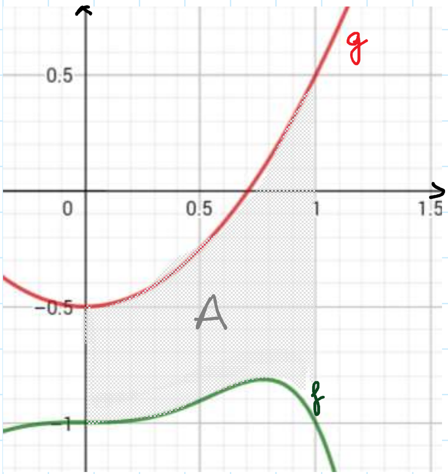
Abschnitt 17.2 Aufgabe 10

Kastriot Cakolli
Johanna Krömer
Juela Spahiu

Berechnen Sie den von den Graphen der Funktionen

$$f(x) := -x^5 + x^3 - 1, \quad g(x) := x^2 - \frac{1}{2}, \quad x \in [0,1],$$

eingeschlossenen Flächeninhalt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.



Nach 17.2.5 lässt sich die Fläche A zwischen den beiden Funktionsgraphen folgendermaßen berechnen:

$A = \ell_2^*(\mathfrak{M}) = \int_a^b \{ g(x) - f(x) \} \, dx$ falls $g(x) \geq f(x) \ \forall \, x \in [a,b]$

mit $\mathfrak{M} := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ f(x) \leq y \leq g(x) \} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$

Dabei sind f und g stetige Funktionen und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge.

Die Funktionen $f(x) = -x^5 + x^3 - 1$
und $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ sind stetig (auf $[0,1]$)
und $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zudem gilt
$g(x) \geq f(x) \ \forall \, x \in [0,1]$.

Mit diesen Voraussetzungen gilt nun:

$$A = \int_0^1 \left\{ x^2 - \tfrac{1}{2} - (-x^3 + x^3 - 1) \right\} dx = \int_0^1 x^5 - x^3 + x^2 + \tfrac{1}{2} \, dx = \left[\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x \right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - 0 = \underline{\underline{\tfrac{3}{4}}}$$

Die Fläche zwischen den Funktionsgraphen beträgt $\frac{3}{4}$.