
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0.2
0.4
0.6
0.8
a
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
k=1
k=2
k=3

Zur 17.1 # 8 ⇝ Falsche Aufgabenstellung! $\quad f^{(k)}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2+kx^3}$

i) ✓ Skizze, $f^{(k)}$, $k = 1,2,3$.

ii) Zeige: $0 \le f^{(k)}(x) \le \frac{1}{k\sqrt{x}}$ ↯ richtig: $\ldots \le \frac{1}{kx^2}$, auf $[1,\infty)$

iii) Zeige: $\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$, $x \in [0,1]$ ↯ richtig: $x \in [1,\infty)$

iv) Zeige: $\lim_{k\to\infty} \int_{[1,\infty)} f^{(k)}(x)\, d\lambda_1(x) = 0$ mit beschränkte Konvergenz; richtig: majorisierte.

Beweis:

ii) $0 \le f^{(k)}(x)$ klar, da Nenner & Zähler stets >0

$$f^{(k)}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2+kx^3} \le \frac{\sqrt{x}}{kx^3} \underset{\sqrt{x}\le x,\ x\in[1,\infty)}{\le} \frac{x}{kx^3} = \frac{1}{kx^2} \quad ✓$$

iii) $\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) \le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kx^2} = 0 \quad \forall x \in [1,\infty)$

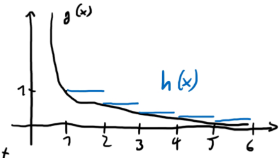
iv) Zeige: $g(x) := \frac{1}{x^2}$ ist L-intbare Majorante, $x \in [1,\infty)$

Klar: $f^{(k)}(x) \le g(x)$ (vgl. ii))

Dazu: $h(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \chi_{[j,j+1)}(x)$

⇝ $g(x) \le h(x) \quad \forall x \in [1,\infty)$

Zeige: $\int_{[1,\infty)} h(x)\, d\lambda_1(x) < \infty$, d.h. h ist L-intbar



Finde mono. wachsende Folge einfacher Fkt. $h^{(n)}(x)$ mit $h^{(n)} \to h$

⇝ $h^{(n)}(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \chi_{[j,j+1)} + 0\,\chi_{[n+1,\infty)}$ ✓

$$\Rightarrow \int_{[1,\infty)} h(x)\, d\lambda_1(x) \overset{\text{Def}}{\underset{\text{L-Integral}}{=}} \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} h^{(n)}(x)\, d\lambda_1(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}(j+1-j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty \quad ✓$$

⇒ h ist L-integrierbar ⇒ g ist L-intbare Majorante für $f^{(k)}$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{[1,\infty)} f^{(k)}(x)\, d\lambda_1(x) \overset{\text{major.}}{\underset{\text{Konv.}}{=}} \int_{[1,\infty)} \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x)\, d\lambda_1(x) \overset{\text{iii)}}{=} \int_{[1,\infty)} 0\, d\lambda_1(x) = 0. \quad \square$$

Kommentar: Warum schreiben wir nicht $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2}\, d\lambda_1(x)$ als (uneigentliches) R-Integral und rechnen dieses einfach aus?

Satz: Für uneigentliche R-Integrale über $\mathbb{R}$ gilt:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ L-messbar & R-intbar über allen kompakten Intervallen $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

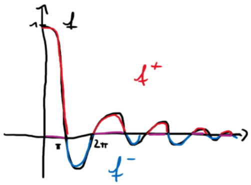
f ist L-intbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ ist uneigentlich R-intbar.

D.h. f uneigentlich R-intbar $\not\Rightarrow$ f ist L-intbar

Bsp.:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
ist uneigentlich R-intbar: $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$ (vgl. Analysis I)

Aber: f ist nicht L-intbar.

Dazu Erinnerung: f L-intbar $\Leftrightarrow$ f^+ & f^- L-intbar



Genau das führt hier zum Problem, da $\int_{[1,\infty)} f^+(x)\, d\lambda_1(x) = \infty$ gezeigt werden kann ⇒ f nicht L-intbar.