Weiterführende Analysis für das Lehramt

Theresa Jürge
Sophie Keller
Lisa Seem

Kapitel 16.3 Aufgabe 4 – Gruppe 2 Abgabe 2

gegebene Funktionenfolge: $f^{(k)}(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \frac{1}{k^2} < x \le 1 \end{cases}$

für $x \in [0,1]$

i) punktweiser Grenzwert $f: [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{sonst} \end{cases}$$

für $x \in [0,1]$

ii) zz: $I = \int_{[0,1]} f(x)\, d\ell_1(x) = 2$

Bew: $\int_{[0,1]} f(x)\, d\ell_1(x) = \int_0^1 f(x)\, dx$

$$= \lim_{a\to 0} \Big(\underbrace{\int_0^a \underbrace{f(x)}_{0} dx}_{0} + \int_a^1 f(x)\, dx \Big)$$

$$= \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0} \left(2\sqrt{x} \Big|_a^1 \right) = \lim_{a\to 0} (2 - \underbrace{2\sqrt{a}}_{\to 0}) = \underline{2}$$

iii) zz: $I = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f^{(k)}(x)\, d\ell_1(x) = 2$

Bew: $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f^{(k)}(x)\, d\ell_1(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f^{(k)}(x)\, dx$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{\int_0^{1/k^2} \underbrace{f^{(k)}(x)}_{0} dx}_{0} + \int_{1/k^2}^1 f^{(k)}(x)\, dx \Big) = \lim_{k\to\infty} \int_{1/k^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(2\sqrt{x} \Big|_{1/k^2}^1 \right) = \lim_{k\to\infty} \left(2 - \frac{2}{k} \right) = 2$$

$\Rightarrow$) Da es sich bei der Funktionenfolge um nichtnegative und monoton wachsende Folgenglieder handelt (für $k \to \infty$ geht $\frac{1}{k^2} \to 0$ und damit gilt $f^{(k)}(x) \leq f^{(k+1)}(x)$ $\forall k = 1, 2, \ldots$ $\forall x \in [0,1]$)

kann der ~~m~~ Satz der monotonen Konvergenz auf der L-mb Menge $[0,1]$ angewendet werden.

Dieser bestätigt die Gleichheit der Integrale aus ii) und iii), da gilt $\int_\Omega f(x)\, dl_n(x) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f^k(x)\, dl_n(x)$.