16.3.7

zz: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ lebesguemessbar, $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ lebesguemessbar und nicht negativ

Dann ist $\int_\Omega f(x)\, d\ell_n(x) \geq 0$

Bew: f wie oben gegeben, dann existiert nach 15.2.2 eine Folge von nicht negativen einfachen Funktionen mit $\lim_{k \to \infty} f^{(k)}(x) = f(x)$ und $f^{(k)}(x)$ mit $0 \leq f^{(1)}(x) \leq f^{(2)}(x) \leq \dots$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x)\, d\ell_n(x) = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x)\, d\ell_n(x) \underset{\substack{\text{Satz der} \\ \text{monotonen} \\ \text{Konvergenz}}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f^{(k)}(x)\, d\ell_n(x) \geq 0$$

da $\left(f^{(k)}(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht negativ und einfach