Abschnitt 19.2 Aufgabe 7

Kastriot Cakolli
Johanna Krömer
Juela Spahiu

Beweisen Sie den ersten Satz aus Paragraph 19.2.3.

Satz: Auf der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei das stetig differenzierbare Gradientenfeld $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit dem zweimal stetig partiell differnzierbarem Potential $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Auf sternförmigen Gebieten sind die Integrabilitätsbedingungen sogar hinreichend, wie unser zweites Kriterium lehrt.

Beweis

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Gradientenfeld mit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbaem Potenzial.

kurz: $\operatorname{grad} \varphi(x) = f(x)$ in Ω (siehe 19.1.4 Definition Gradientenfeld)

$$\Rightarrow \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j \, \partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad \text{für alle } i,j = 1, \ldots, n$$

Vertauschbarkeit der Ableitungen gilt nach dem Satz von Schwarz
Zur Erinnerung aus Ana 2 (13.3.2)

Satz: Es seien $\Omega \subseteq \mathrm{R}^2$ eine offene Menge und $f\colon \Omega \to \mathrm{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ und $f_{xy}(x, y)$ in Ω stetig sind. Dann existiert auch die partielle Ableitung $f_{yx}(x, y)$ in Ω, und es gilt

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \quad \text{in } \Omega.$$

$\}$ Voraussetzungen sind hier gegeben