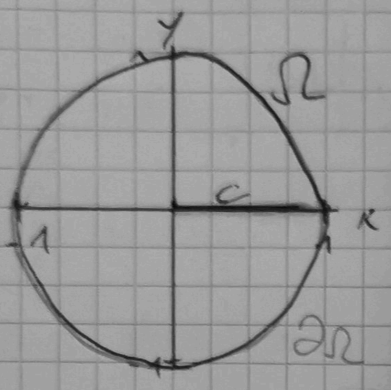
17.3 #6

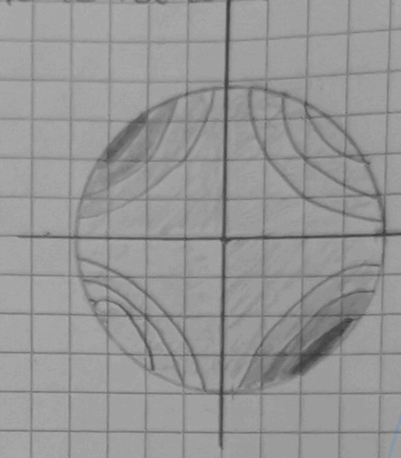
$\phi(x,y) = (x, y, u(x,y))$ mit $u(x,y) = xy$

$(x,y) \in \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Skizze



Höhenlinien



17.3.3:

$$A(\phi(\Omega)) = \int_\Omega \sqrt{1 + \phi_x^2(x,y) + \phi_y^2(x,y)} = \int_\Omega \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, d\ell_2(x,y)$$

wobei $\partial\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \phi_x(x,y) & \phi_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$

$ \uparrow \quad \uparrow$
$ \phi_x \quad \phi_y$

Wende nun Polarkoord. an:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Damit ist $\sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{1 + r^2(\sin^2 + \cos^2)} = \sqrt{1 + r^2}$

Um Trafo-Formel anwenden zu können brauchen wir offene Menge:

$$\tilde{\Omega} = \Omega \setminus (\underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}}_{\partial\Omega} \cup \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \geq 0\}}_{c}$$

- Aufgrund der Periodizität müssen wir x-Achse rausnehmen, da sie „doppelten“ Wert liefern würde $(0, 2\pi)$

Definiere nun Diffeomorphismus:

$$\Phi : (0,1) \times (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Wende nun Trafoformel an:

Berechne zuerst $\left|\det(\partial\Phi)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cdot r \\ \sin\varphi & +\cos\varphi\cdot r \end{pmatrix}\right|$

$= |r|$

Damit

$$\int \sqrt{1+x^2+y^2}\, d\ell_2 \overset{\text{Transformationsformel}}{=} \int_{\Omega} |r| \sqrt{1+r^2}\, d\ell_2(r,\varphi) = \int_{\tilde{\Omega}} |r| \sqrt{1+r^2}\, d\ell_2(r,\varphi) =$$

$$= \int_{(0,1)\times(0,2\pi)} |r| \cdot \sqrt{1+r^2}\, d\ell_2(r,\varphi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(0,1)} \int_{(0,2\pi)} r\sqrt{1+r^2}\, d\ell_2(r,\varphi)$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\, dr$$

Sub:

$u = 1+r^2 \iff r = \sqrt{u-1}$

$r' = \frac{1}{2\sqrt{u-1}}$

$dr = \frac{1}{2\sqrt{u-1}}\, du$

Damit:

$$2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\, dr = 2\pi \int_1^2 \sqrt{u-1} \cdot \sqrt{1+u-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u-1}}\, du$$

$$= \pi \int_1^2 \sqrt{u} = \pi \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2\pi}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi\left(2^{\frac{5}{2}} - 2\right)}{3} \approx 3{,}83$$