

Marie Sophia Raasch, Kai Christian Burkhardt,
Fabienne Brabänder

Beispiel:

Es sei $\{q_1, q_2, \dots\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Wir setzen $f^{(k)}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{q_1, \dots, q_k\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Sei k beliebig

Für $c < 0 = \{x \in [0, 1] \mid f^{(k)}(x) > c\} = [0, 1]$ ist

Lebesguemessbar, da Intervalle Lebesguemessbar sind.

Für $0 < c < 1 = \{x \in [0, 1] \mid f^{(k)}(x) > c\} = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$

ist Lebesguemessbar, da endliche Mengen

Lebesguemessbar sind.

Für $c \geq 1 = \{x \in [0, 1] \mid f^{(k)}(x) > c\} = \{\}$ ist Lebesgue-

messbar, da die leere Menge Lebesguemessbar ist.

$\Rightarrow f^{(k)}(x)$ ist Lebesguemessbar

\Rightarrow Da k beliebig ist jede Funktion $f^{(k)}(x)$ Lebesgue-
messbar

Nach der Bemerkung aus Paragraph 15.1.4 folgt,

dass dann auch die Grenzfunktion, die

Dirichlet-Sprungfunktion, Lebesguemessbar ist

Nach dem Lebesgueschen Kriterium zur Riemann-

integrierbarkeit aus Paragraph 17.1.4 ist jede

Funktion $f^{(k)}(x)$ Riemannintegrierbar, da $f^{(k)}(x)$

auf $[0, 1]$ nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen

besitzt.

wie in Paragraph 14.1.1 bereits erklärt, ist die

Dirichlet-Sprungfunktion nicht Riemannintegrierbar.