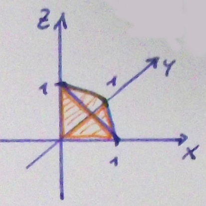
Aufgabe 7 zu 17.2.6

Berechnen Sie m. H. des Satzes von Fubini das Integral $\int_\Omega (2x+y+z)\, d\lambda_3(x,y,z)$, wobei Ω der von den Koordinatenebenen und der Ebene $x+y+z=1$ begrenzte Körper ist.

Lösung: $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1 \text{ und } x,y,z \geq 0\} \subseteq [0,1]^3$



$\Rightarrow$ Ω beschränkt $\Rightarrow$ $f = 2x+y+z$ beschränkt auf Ω

$\overset{17.1.4}{\Rightarrow}$ f Riemannintegrierbar auf Ω, da f stetig auf Ω

$\Rightarrow$ f ist damit auch Lebesgueintegrierbar

Sei $z \in [0,1]$, $y \in [0,1-z]$, $x \in [0,1-z-y]$, dann folgt mit 17.2.3.

$$\int_\Omega f(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z) = \int_{[0,1]\times[0,1-z]} \int_{[0,1-z-y]} f(x,y,z)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_2(y,z) \overset{17.1.4}{=} \int_{[0,1]\times[0,1-z]} \int_0^{1-z-y} (2x+y+z)\, dx\, d\lambda_2(y,z)$$

$$= \int_{[0,1]\times[0,1-z]} x(x+y+z)\Big|_{x=0}^{x=1-z-y} d\lambda_2(y,z) = \int_{[0,1]} \int_{[0,1-z]} (1-z-y)\, d\lambda_1(y)\, d\lambda_1(z) = \int_{[0,1]} \int_0^{1-z} (1-z-y)\, dy\, d\lambda_1(z)$$

$$= \int_{[0,1]} y\left(1-z-\tfrac{1}{2}y\right)\Big|_{y=0}^{y=1-z} d\lambda_1(z) = \int_{[0,1]} \tfrac{1}{2}(1-z)^2\, d\lambda_1(z) = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-z)^2\, dz = -\tfrac{1}{6}(1-z)^3\Big|_0^1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

von Gregor Hergenhahn, Gabriel Klaedtke u. Antonio Kapper