Gruppe 2 Abgabegruppe 6

Kastriot Cakolli
Johanna Krömer
Juela Spahiu

Abschnitt 14.3

Rechenaufgabe 6

Verifizieren Sie die Subadditivität des äußeren Lebesguemaßes anhand eines Beispiels!

Definition äußeres Lebesguemaß

$$\ell_n^*(\Omega) := \inf\Big\{ \sum_{k\geq 1} |Q_k| : \Omega \subseteq \bigcup_{k\geq 1} Q_k,\ Q_k \subset \mathbb{R}^n \text{ beschränkter, offener Quader} \Big\}$$

Definition Subadditivität

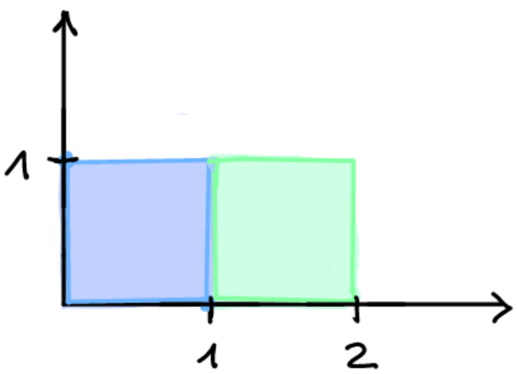
$$\ell_n^*\Big(\bigcup_{k\geq 1} \Omega_k\Big) \leq \sum_{k\geq 1} \ell_n^*(\Omega_k)$$

- gilt für alle beliebigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$
- Gleichheit gilt, wenn nur L-messbare Mengen betrachtet werden und diese L-messbaren Mengen disjunkt sind.

① Sei $k=2$, $n=2$
Das heißt $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$

$\Omega_1 := [0,1]\times[0,1]$ und $\Omega_2 := (1,2]\times[0,1]$

Ω_1 und Ω_2 sind disjunkte Mengen und L-messbar



$\Longrightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2 = [0,2]\times[0,1]$

$\ell_2^*(\Omega_1\cup\Omega_2) = (2-0)\cdot(1-0) = 2$

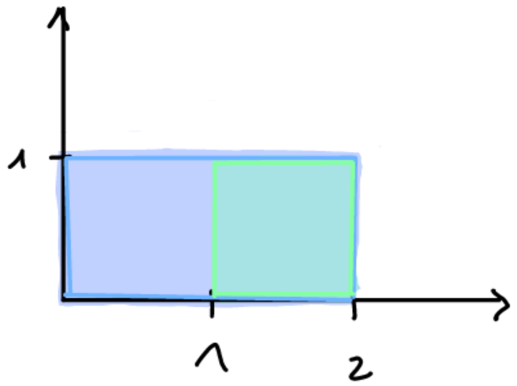
$$\sum_{k=1}^{2} \ell_2^*(\mathcal{W}_k) = \ell_2^*(\mathcal{W}_1) + \ell_2^*(\mathcal{W}_2)$$
$$= (1-0)\cdot(1-0) + (2-1)\cdot(1-0)$$
$$= 1 + 1 = 2$$

Gleichheit

im Fall von disjunkten Mengen $\mathcal{W}_k$

② Sei $k=2$, $n=2$
Das heißt $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \subset \mathbb{R}^2$

$\mathcal{W}_1 := [0,2] \times [0,1]$ und $\mathcal{W}_2 := [1,2] \times [0,1]$



$$\Longrightarrow \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1$$
$$\ell_2^*(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = \ell_2^*(\mathcal{W}_1)$$
$$= (2-0)\cdot(1-0) = 2$$

$\neq$

$$\sum_{k=1}^{2} \ell_2^*(\mathcal{W}_k) = \ell_2^*(\mathcal{W}_1) + \ell_2^*(\mathcal{W}_2)$$
$$= (2-0)\cdot(1-0) + (2-1)\cdot(1-0)$$
$$= 2 + 1 = 3$$

Ungleichheit

im Fall nicht disjunkter $\mathcal{W}_k$