Aufgabe 15.1/10 Lisa Seemann, Theresa Jürgens, Sophie Keller

Sonntag, 22. November 2020
10:50

10. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesguemessbar. Ferner seien zwei Funktionen $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben, wobei f Lebesguemessbar ist und $f = g$ fast überall in Ω gilt, d.h.

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N$$

mit einer Lebesgueschen Nullmenge $N \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch g Lebesguemessbar ist.

Die Funktion $g:\Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt Lebesguemessbar, falls für jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ folgende Menge Lebesguemessbar ist
$\{x \in \Omega: g(x) > c\}$ $c \in \mathbb{R}$ beliebig.
Daher ist zu zeigen, dass die folgende Gleichung mit $C \subset \mathbb{R}$ bel. erfüllt ist, damit die Menge nach Caratheodory Lebesguemessbar ist:

$$\text{z.z:} \quad \underbrace{\ell_n^*\left(C \cap \{x \in \Omega : g(x) > c\}\right)}_{1} + \underbrace{\ell_n^*\left(C \cap \{x \in \Omega : g(x) > c\}^c\right)}_{2} \leq \ell_n^*(C)$$

Beweis: Betrachte zunächst 1 und 2 getrennt voneinander:

$$\begin{aligned}
1 \quad & \ell_n^*(C \cap \{x \in \Omega : g(x) > c\} \\
= \; & \ell_n^*(C \cap (\{x \in \Omega \setminus N : g(x) > c\} \cup \{x \in N : g(x) > c\})) \\
\overset{\text{Sub-additivität}}{\leq} \; & \ell_n^*(C \cap \underbrace{\{x \in \Omega \setminus N : g(x) > c\}}_{\overset{f(x)=g(x)\ \forall x \in \Omega\setminus N}{=} \{x \in \Omega \setminus N : f(x) > c\}}) + \ell_n^*\underbrace{(C \cap \underbrace{\{x \in N : g(x) > c\}}_{\subset N})}_{\subset N} \\
\overset{14.3.2\,ii)}{\leq} \; & \ell_n^*\underbrace{(C \cap \underbrace{\{x \in \Omega \setminus N : f(x) > c\}}_{\subset \{x \in \Omega : f(x) > c\}})}_{\subset [C \cap \{x \in \Omega : f(x) > c\}]} + \underbrace{\ell_n^*(N)}_{=0} \\
\overset{14.3.2\,ii)}{\leq} \; & \ell_n^*(C \cap \{x \in \Omega : f(x) > c\})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \quad & \ell_n^*(C \cap \{x \in \Omega : g(x) > c\}^c) \\
= \; & \ell_n^*(C \cap [\{x \in \Omega \setminus N : g(x) > c\} \cup \{x \in N : g(x) > c\}]^c) \\
= \; & \ell_n^*(C \cap [\{x \in \Omega \setminus N : g(x) > c\}^c \cap \{x \in N : g(x) > c\}^c]) \\
\overset{f(x)=g(x)\ \forall x \in \Omega\setminus N}{=} \; & \ell_n^*(C \cap [\{x \in \Omega \setminus N : f(x) > c\}^c \cap \{x \in N : g(x) > c\}^c]) \\
\overset{14.3.2\,ii)\ [A \cap (B \cap C) \subseteq A \cap B]}{\leq} \; & \ell_n^*(C \cap \{x \in \Omega \setminus N : f(x) > c\}^c) \\
= \; & \ell_n^*(C \cap [\{x \in \Omega : f(x) > c\} \setminus \{x \in N : f(x) > c\}]^c) \\
\overset{[(A \setminus B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B]}{=} \; & \ell_n^*(C \cap [\{x \in \Omega : f(x) > c\}^c \cup \{x \in N : f(x) > c\}]) \\
\overset{\text{Subadditivität}}{\leq} \; & \ell_n^*(C \cap \{x \in \Omega : f(x > c\}^c) + \underbrace{\ell_n^*(C \cap \{x \in N : f(x) > c\})}_{= 0 \text{ (s.o.)}}
\end{aligned}$$

Damit folgt aus 1 und 2:

$$\underbrace{\ell_n^*\left(C \cap \{x \in \Omega : g(x) > c\}\right)}_{1} + \underbrace{\ell_n^*\left(C \cap \{x \in \Omega : g(x) > c\}^c\right)}_{2}$$

$$\leq \ell_n^*\left(C \cap \{x \in \Omega : f(x) > c\}\right) + \ell_n^*\left(C \cap \{x \in \Omega : f(x) > c\}^c\right)$$

$$= \ell_n^*(C), \text{ da } f \ \mathcal{L}\text{-mb und somit auch } \{x \in \Omega : f(x) > c\} \ \mathcal{L}\text{-mb.}$$

Damit ist {x∈Ω: g(x)>c} lebesguemessbar und damit auch g lebesguemessbar. Qed.