

15.2.3.

3. Begründen Sie, dass die Dirichletsche Sprungfunktion eine einfache Funktion ist.

Begründung

Nach 14.1.3. ist die Dirichletsche Sprungfunktion wie folgt definiert:

$$\chi_{\substack{[0,1] \\ \cap \mathbb{Q}}} (x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad x \in [0,1]$$

Nach 15.2.1. versteht man unter einer einfachen Funktion folgendes:

$$\varphi(x) = \sum_{\xi=1}^m c_{\xi} \chi_{\Omega_{\xi}}(x) \text{ mit } c_{\xi} \in \mathbb{R} \text{ und } \Omega_{\xi} \text{ } \mathcal{L}\text{-messbar}$$

Wähle  $m=1$ ,  $\Omega_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ,  $c_1 = 1$ .

Da  $\Omega_1$  nach 14.4.5.(7)  $\mathcal{L}$ -messbar ist, ist

die Dirichletsche Sprungfunktion als einfache Funktion identifiziert.

Die Lösung stammt von Gregor Hergenhold, Gabriel Klaedtke und Antonio Kapper.