

16.1.3 Aufgabe 3)

Es bezeichne $f(x)$ die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ vermöge } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ermitteln Sie die Lebesguesche Unter- und Obersumme für eine selbst gewählte äquidistante Zerlegung $\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 = \beta$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Wir wählen $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}$ mit äquidistanter Zerlegung

$$y_0 = -\frac{1}{2}, y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = 1, y_4 = \frac{3}{2}$$

$$\Omega_1 = \{x \in [0, 1] : -\frac{1}{2} \leq f(x) < 0\} = \emptyset$$

$$\Omega_2 = \{x \in [0, 1] : 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}\} = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$$

$$\Omega_3 = \{x \in [0, 1] : \frac{1}{2} \leq f(x) < 1\} = \emptyset$$

$$\Omega_4 = \{x \in [0, 1] : 1 \leq f(x) < \frac{3}{2}\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$$

Somit:

$$l_1^*([0, 1]) = 1, \Omega_2, \Omega_4 \text{ disjunkt, } l_1^*(\mathbb{R}_0) = 0$$

$$l_1^*(\Omega_1) = \cancel{l_1^*(\Omega_2)} = l_1^*(\Omega_3) = l_1^*(\Omega_4) = 0, l_1^*(\Omega_2 \cup \Omega_4) = l_1^*(\Omega_2) = 1$$

Die Lebesguesche Untersumme ergibt sich mittels

$$\sum_{k=1}^4 y_{k-1} l_1^*(\Omega_k) = \cancel{0} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

und die Obersumme mittels

$$\sum_{k=1}^4 y_k l_1^*(\Omega_k) = \cancel{0} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

