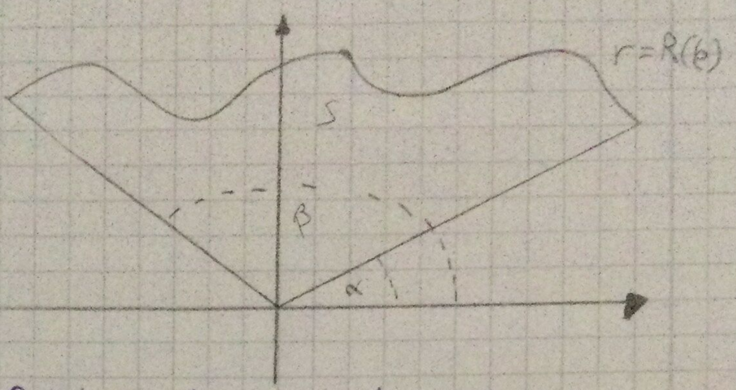
Kapitel 17.3.6

Aufgabe 10



Es sei $S \subset \mathbb{R}^2$ ein Sektor, der von den Strahlen α und β begrenzt wird. Außerdem wird sie durch die Kurve $r = R(\varphi)$ berandet.

Es soll folgende Formel bewiesen werden:

$$A(S) = \int_S 1 \, d\ell_2(x,y) = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{R(\varphi)} r \, dr \right) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta R(\varphi)^2 \, d\varphi$$

Im ersten Schritt wurde mithilfe der Transformationsformel für Mehrfachintegrale das Integral in ein Doppelintegral überführt. Hier wurden Polarkoordinaten genutzt.

Es gilt: $\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\partial\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$

$\det(\partial\phi(r,\varphi)) = r$

Das heißt, dass unsere Jacobi Determinante r ist.
Unser Sektor wird horizontal von α und β begrenzt und vertikal von 0 und $R(\varphi)$, daher erhalten wir

$A(S) = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{R(\varphi)} r \, dr \right)$. Das innere Integral ergibt $\frac{1}{2} R(\varphi)^2$ und wir erhalten $\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta R(\varphi)^2 \, d\varphi$.

Durch den Satz von Fubini (17.2.3) konnten wir zuerst nach r integrieren und dann nach φ.

Außerdem wurde verwendet, dass zwischen dem eindimensionalen Lebesgue- und des eindimensionalen Riemannintegrals Gleichheit gilt.

Die Transformationsformel ausführlicher:

$$\int_S 1 \, d\ell_2(x,y) = \int_{\tilde{S}} 1 \, d\ell_2(x,y) = \int_\Omega r \, d\ell_2(r,\varphi)$$

$$= \int_{(\alpha,\beta)} \int_{(0,R(\varphi))} r \, d\ell_1(\varphi) \, d\ell_1(r) = \int_\alpha^\beta \int_0^{R(\varphi)} r \, dr \, d\varphi$$